

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Doppelbrechung	6
1.1 Lösung der Wellengleichung	9
1.2 Die Ausbreitungsrichtung der Welle	18
1.3 Strahlgeschwindigkeit	21
1.4 Brechungs- und Reflexionsgesetz	22
1.5 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten	38
2 Lichtsammlung	51
2.1 Brechungsgesetz und Totalreflexion	52
2.2 Absorption	55
2.3 Streuung	56
2.4 Doppelbrechende Medien	59
2.5 Pyramidenstumpf-Geometrie	64
2.6 Bedeckungsfaktor	68
2.7 Verpackung	70
2.8 Brechungsindex des Kitts	71
2.9 Antireflexschicht am Photodetektor	72
2.10 Absorption im Kitt	74
3 Simulation mit Licobix	75
3.1 Funktionsweise von Licobix	75
3.2 Simulierbare Eigenschaften	77

3.3	Ergebnisse der Simulation	78
3.4	Vergleich mit LIGHT II	79
4	Lichtsammlung in PbWO₄	81
4.1	Messung der Lichtausbeute für verschiedene Verpackungen	81
4.2	Simulation der Messungen mit Licobix	85
	Zusammenfassung	88
	Literaturverzeichnis	90
A	Mathematische Herleitungen	92
A.1	$\vec{k} \cdot \vec{E}$	92
A.2	Wellengleichung	93
A.3	Ordentliche Lösung	94
A.4	Außerordentliche Lösung	95
A.5	Ausbreitungsrichtung der Welle	97
A.6	Brechungs- und Reflexionsgesetz	98
A.7	Gemittelter Brechungsindex	100
A.8	Reflexions- / Transmissionskoeffizienten	101
A.9	Flächentreue Projektion	103
B	Simulationsparameter	104
C	Programmanleitung Licobix	107

Einleitung

In den letzten Jahrzehnten hat die Physik der Elementarteilchen eine bemerkenswerte Entwicklung erfahren. Die dabei erzielten Fortschritte haben in großem Maße zur Vertiefung des Verständnisses der Struktur der Materie und zur Aufklärung der Wechselwirkungen ihrer Bausteine, der sog. Elementarteilchen, beigetragen. Ein erster großer Schritt auf dem Weg zur Vereinheitlichung der vier bekannten Wechselwirkungsfelder (Gravitation, schwache, elektromagnetische und starke Wechselwirkung) wurde mit der Formulierung und experimentellen Bestätigung des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung von Glashow [1], Salam [2] und Weinberg [3] vollbracht.

Das Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung bildet zusammen mit der Theorie der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik QCD) [4] das Standardmodell der Elementarteilchenphysik, mit dem die Teilchenphysik heute über eine äußerst erfolgreiche Theorie verfügt.

Eine der fundamentalen physikalischen Fragen, die noch auf ihre Antwort wartet, ist die nach dem Verständnis der Massen der Elementarteilchen. Im Rahmen des Standardmodells werden die Massen der elementaren Teilchen durch den Higgs-Mechanismus [5] erzeugt. Dazu muß ein skalares sog. Higgs-Feld eingeführt werden, durch das Quarks, Leptonen und Bosonen ihre Masse erhalten. Dies erfordert allerdings die Existenz eines zusätzlichen neutralen, massiven und skalaren Higgs-Bosons. Die Entdeckung des Higgs-Bosons wäre ein weiterer experimenteller Hinweis für die Richtigkeit dieser Theorie.

Für die Masse des Higgs-Bosons wurde mit den LEP¹-Experimenten eine experimentelle untere Grenze von 88 GeV ermittelt [6]. Die obere Grenze der Higgs-Masse liegt aus theoretischen Gründen bei ca. 1 TeV.

Die experimentelle Prüfung der Existenz des Higgs-Bosons ist eine starke Motivation zum Bau neuer Generationen von Teilchenbeschleunigern, wie der Proton-Proton-Speicherring LHC² am CERN mit einer geplanten Schwerpunktenergie von 15 TeV, die den Massenbereich bis 1 TeV experimentell zugänglich machen.

Extrem schwierig ist der Nachweis der Higgs-Bosonen im intermediären Massen-

¹Large Electron Positron Collider

²Large Hadron Collider

bereich von $90 \text{ GeV} < M_H < 150 \text{ GeV}$. Aufgrund intensiver Vorstudien wird der Nachweis des Higgs-Bosons über seinen Zwei-Photon-Zerfallskanal ($H \rightarrow \gamma\gamma$) als aussichtsreichste Möglichkeit angesehen. Eine Abtrennung dieses Signals vom Untergrund ist jedoch nur bei einer sehr guten Auflösung der invarianten Masse der zwei Photonen möglich. Bei der erwarteten Higgs-Produktionsrate erfordert dies unter anderem eine Energiemessung der γ -Quanten mit einer Energieauflösung von $\frac{\sigma_E}{E} \leq 0.55\%$ [7].

An zwei der vier Wechselwirkungszonen des LHC sollen die Universal-Detektoren ATLAS³ und CMS⁴ installiert werden, die mit unterschiedlichen Nachweistechniken die experimentellen Anforderungen erfüllen sollen.

Zum Nachweis von γ -Quanten und Elektronen wird bei CMS ein elektromagnetisches Kalorimeter eingesetzt, das aus ca. 80 000 Bleiwolframat-Kristallen (PbWO_4) besteht, die mit Avalanche-Photodioden (APDs) ausgelesen werden. Die Energieauflösung eines homogenen Kristallkalorimeters wird unter anderem von der Lichtausbeute und der Uniformität der Lichtausbeute (Abhängigkeit der Lichtausbeute vom Entstehungsort des Szintillationslichtes im Kristall) beeinflusst.

Die PbWO_4 -Kristalle weisen eine im Vergleich zu anderen Szintillatoren niedrige und nicht uniforme Lichtausbeute auf, zu dem sind die Kristalle doppelbrechend. Um die für den Higgs-Nachweis erforderliche Energieauflösung zu erreichen, müssen auch kleine Effekte berücksichtigt werden. Insbesondere die Frage, wie sich die Doppelbrechung auf die Uniformität der Lichtausbeute und damit auf die Energieauflösung auswirkt, ist bisher noch nicht untersucht worden. Bevor aus analytischen Rechnungen oder Simulationen Schlußfolgerungen gezogen werden können, muß die Theorie der Doppelbrechung bekannt sein.

Die moderne Literatur (Hecht-Zajak, Bergmann-Schaefer [8, 9]) behandelt die Theorie der Doppelbrechung meist nicht detailliert, sondern beschränkt sich auf eine anschauliche Beschreibung der Phänomene. Bei Sommerfeld, Born und Pérez [10, 11, 12] finden sich schon wesentlich detailliertere Darstellungen des Problems. Das Verhalten an der Grenzfläche des doppelbrechenden Mediums (Reflexion- und Brechungsgesetz, Fresnelformeln) wird aber auch hier ausgespart und auf ältere Literatur verwiesen: „Aber die Durchführung der Methode ist im allgemeinen Fall viel zu umständlich, als daß wir sie hier bringen könnten.“ (*Optik* von Arnold Sommerfeld, §27) In einer Fußnote verweist er auf das *Lehrbuch der Kristallogoptik* von F. Pockels aus dem Jahre 1906 [13]. Dort findet man tatsächlich eine geometrische Lösung des Problems:

³A Toroidal LHC ApparatuS

⁴Compact Muon Solenoid

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
 AUF DEM GEBIETE DER
 MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
 MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
 BAND XIX

LEHRBUCH
 DER KRISTALLOPTIK

VON

DR. F. POCKELS

AO. PROFESSOR FÜR PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT HEIDELBERG

cg 1225

MIT 168 FIGUREN IM TEXT UND 6 DOPPELTAFELN



LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1906

Die Ebenen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$, welche nach obigem Satz durch die Richtungen E_1, D_1, I_1 bzw. E_2, D_2, I_2 hindurchgehen, werden nun näher bestimmt durch einen weiteren, von Mac Cullagh gefundenen Satz, der sie zu den gebrochenen Strahlen in Beziehung setzt. Da nämlich die Ebene \mathfrak{P}_1 durch D_1 hindurchgeht, so steht sie senkrecht auf der Schwingungsebene, d. h. der die Wellennormale und den Strahl enthaltenden Ebene; ihre Lage ist demnach vollständig bestimmt durch den Winkel χ_k , welchen ihre Normale P_1 mit derjenigen Q_k der gebrochenen Welle bildet. (Siehe Figur 74, worin die Indizes k an Q, D, E, S, P fortgelassen sind und Q^0 die einfallende Wellennormale ist.) Nun ist im sphärischen Dreieck PQQ^0

$PQ = \chi_k, Q^0Q = i - r_k$ und $\sphericalangle PQQ^0 = \frac{\pi}{2} + \delta_k, \sphericalangle P^0QQ^0 = \frac{\pi}{2} - \epsilon_k,$
 (da E der Pol des Bogens PQ^0, D derjenige von PQ ist); folglich
 $\cotg \chi_k \sin(i - r_k) = \tg \epsilon_k \cos \delta_k - \cos(i - r_k) \sin \delta_k$
 oder mit Benutzung von (12):

$$(16) \cotg \chi_k = \tg \tau_k \frac{\sin^2 r_k}{\sin(i + r_k) \sin(i - r_k)} = \tg \tau_k \frac{\sin^2 r_k}{\sin^2 i - \sin^2 r_k} = \tg \tau_k \frac{q_k^2}{q^2 - q_k^2}.$$

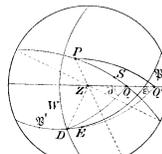


Fig. 74.

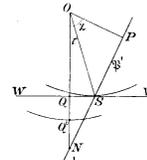


Fig. 75.

Der hierdurch bestimmte Winkel χ_k läßt sich nun in einfacher Weise geometrisch konstruieren. Es sei (Fig. 75) OS der eine gebrochene Strahl, W die Wellenebene, $OQ = q_k$ die Wellennormale, $ON = \frac{q^2}{q_k}$, also N der zugehörige Punkt der im Verhältnis $q^2 = \left(\frac{1}{n^2}\right)^2$ verkleinerten Indexfläche. Dann ist

$$QS = q_k \tg \tau_k, \quad QN = \frac{q^2}{q_k} - q_k,$$

also

$$\tg(QNS) = \frac{q_k^2}{q^2 - q_k^2} \tg \tau_k,$$

Als Grundlage für Simulationsprogramme zur Lichtsammlung ist diese Lösung allerdings ungeeignet.

Im Rahmen der Forschungs- und Entwicklungsarbeiten für das elektromagnetische Kalorimeter des CMS-Detektors, an denen das I. Physikalische Institut der RWTH Aachen beteiligt ist, entstand die hier vorgelegte Arbeit. Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel eins wird die Theorie der Doppelbrechung auf Basis der Maxwellgleichungen algebraisch allgemein formuliert und gelöst. Anschließend werden in Kapitel zwei die grundlegenden Effekte der Lichtsammlung diskutiert. Das entwickelte Simulationsprogramm zur Lichtsammlung „Licobix“ wird in Kapitel drei beschrieben und die mit dem Programm erzielten Rechnungen in Kapitel vier mit Messungen verglichen.

Kapitel 1

Doppelbrechung

Doppelbrechung nennt man das Phänomen, bei dem ein Lichtstrahl bei Eintritt in ein Medium in zwei Strahlen aufspaltet, die sich in unterschiedliche Richtungen fortpflanzen und zueinander senkrecht polarisiert sind. Erasmus Bartholinus entdeckte sie 1669 bei einem Kristall aus isländischem Kalkspat (Calcit, CaCO_3). [9]

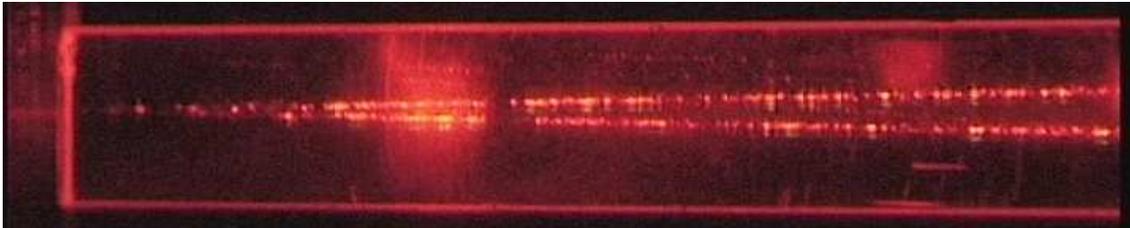


Abbildung 1.1: *Beim Eintritt in den doppelbrechenden PbWO_4 -Kristall spaltet der von links einfallende Strahl in zwei Strahlen auf.*

Doppelbrechung entsteht in optisch anisotropen Medien, in denen die Dielektrizitätskonstante ϵ , die zwischen \vec{D} und \vec{E} vermittelt, richtungsabhängig ist. Der Zusammenhang¹ zwischen \vec{D} und \vec{E} ist in diesem Fall durch einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe gegeben [10]:

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{\epsilon} \vec{E} \qquad \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \vec{\epsilon}^{-1} \vec{D}$$

¹In dieser Arbeit wird das SI-Einheitensystem verwendet.

Ein solcher Tensor läßt sich immer durch eine geeignete Koordinatentransformation in Hauptachsenform darstellen:

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad \vec{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_3} \end{pmatrix}$$

Damit läßt sich der Zusammenhang zwischen \vec{D} und \vec{E} vollständig durch die drei Größen ϵ_1 , ϵ_2 und ϵ_3 beschreiben.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$: isotroper Kristall, keine Doppelbrechung
2. Genau zwei ϵ_i sind gleich: optisch einachsiger Kristall, Doppelbrechung
3. Alle drei ϵ_i sind unterschiedlich: optisch zweiachsiger Kristall, Doppelbrechung

Da PbWO_4 aufgrund seiner tetragonalen Struktur zur Klasse der optisch einachsigen Kristalle gehört, beschränkt sich diese Arbeit auf die Lösung der Doppelbrechung in optisch einachsigen Kristallen.²

Abbildung 1.2 zeigt einen tetragonalen Kristall, bei dem die Atomabstände nur in einer Ebene gleich sind, in der Richtung senkrecht dazu aber einen anderen Wert besitzen. Diese Richtung wird optische Achse (\vec{OA}) genannt. In Richtung der optischen Achse nimmt ϵ den Wert ϵ_{AO} an (AO steht für außerordentlich), in der Ebene senkrecht dazu den Wert ϵ_O (O bedeutet ordentlich)

Wählt man das Koordinatensystem so, daß die Richtung der optischen Achse die \vec{e}_3 -Richtung ist ($\vec{OA} = (0, 0, 1)$), so nehmen der Tensor bzw. der inverse Tensor folgende einfache Gestalt an:

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_O & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_O & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{AO} \end{pmatrix} \quad \vec{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_O} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_O} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_{AO}} \end{pmatrix}$$

Wird der Kristall von einem \vec{D} -Feld durchdrungen, läßt sich dieses in die Komponenten parallel (D_{\parallel}) und senkrecht (D_{\perp}) zur optischen Achse zerlegen und es gilt:

$$\begin{aligned} D_{\perp} &= \epsilon_o \epsilon_O E_{\perp} \\ D_{\parallel} &= \epsilon_o \epsilon_{AO} E_{\parallel} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \frac{\epsilon_O}{\epsilon_{AO}} \cdot \frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}}$$

² Die Lösung des Problems für optisch zweiachsige Kristalle ist wesentlich komplexer, sollte aber nach dem gleichen Schema funktionieren.

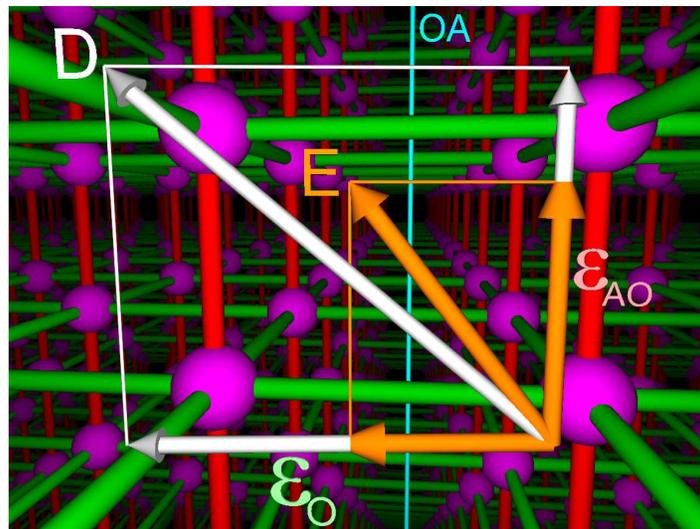


Abbildung 1.2: *Ein richtungsabhängiges ϵ führt dazu, daß \vec{D} und \vec{E} nicht parallel sind*

Der \vec{E} -Vektor wird gegen den \vec{D} -Vektor verkippt und zwar innerhalb der Ebene, die vom \vec{D} -Vektor und der optischen Achse aufgespannt wird.

Stehen \vec{E} - oder \vec{D} -Feld parallel oder senkrecht zur optischen Achse, entsteht keine Verkipfung.

1.1 Lösung der Wellengleichung

Um zu untersuchen, ob und wie sich elektromagnetische Wellen in anisotropen Medien ausbreiten, werden die folgenden Gleichungen benötigt:

Maxwellgleichungen:

Materialgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \vec{D} &= \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{B} &= \mu_o(\vec{H} + \vec{M}) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & & \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} & & \end{aligned}$$

Im anisotropen Kristall gelten folgende Punkte:

- Im Isolator ist $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$
- In nichtmagnetischen Kristallen verschwindet die Magnetisierung:
 $\vec{M} = \vec{0}$ und somit $\vec{B} = \mu_o \vec{H}$
- Der ϵ -Tensor vermittelt zwischen \vec{D} und \vec{E} : $\vec{D} = \epsilon_o \vec{\epsilon} \vec{E}$

Einsetzen ergibt die auch für optisch anisotrope Kristalle gültigen Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ im allgemeinen *nicht* $\nabla \cdot \vec{E} = 0$.

Ebene Wellen sind im isotropen Fall eine Lösung der Wellengleichung. Daher soll nun versucht werden, ob und unter welchen Bedingungen dies auch im anisotropen Medium gilt:

Der Ansatz ebener Wellen lautet:

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E} \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

mit:

\vec{E}' : elektrisches Feld am Ort \vec{r} zur Zeit t

\vec{E} : Amplitude der Welle

\vec{k} : Wellenvektor mit $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

ω : Kreisfrequenz der Welle

Mit diesem Ansatz ebener Wellen kann in den Maxwellgleichungen der Operator ∇ durch $i\vec{k}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ durch $-\omega$ ersetzt werden:

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.1)$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu_o \vec{H} \quad (1.2)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.3)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \quad (1.4)$$

(1.2) in (1.4) eingesetzt ergibt:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_o \vec{D}$$

und damit die Wellengleichung für \vec{E} :

$$(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - \vec{k}^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_o \epsilon_o \vec{E}$$

Die Gleichung ist eine Vektorgleichung und muß für alle drei Komponenten von \vec{E} gleichzeitig erfüllt werden.

1.1.1 Isotrope Lösung

Um den Unterschied zur gleich folgenden allgemeinen Lösung besser zu sehen, wird zunächst noch die isotrope Lösung der Wellengleichung gezeigt:

ϵ ist ein Skalar und damit folgt aus (1.1): $\vec{k} \cdot \vec{E} = \epsilon_o \epsilon \cdot \vec{k} \cdot \vec{D} = 0$. Die Wellengleichung vereinfacht sich erheblich:

$$\vec{k}^2 \cdot \vec{E} = \omega^2 \mu_o \epsilon_o \epsilon \cdot \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{k}^2 - \omega^2 \mu_o \epsilon_o \epsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}^2 - \omega^2 \mu_o \epsilon_o \epsilon = 0$$

Die Lösung liefert das Verhältnis von ω zu $|\vec{k}|$, die über die Konstanten μ_o , ϵ_o und ϵ verbunden sind. Dies ist unabhängig von \vec{E} stets für alle drei Komponenten gleichzeitig erfüllt, falls gilt:

$$\frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}_{c_o}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = c$$

c ist die Phasengeschwindigkeit der Welle. Üblicherweise wird aber das Verhältnis von Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 zu Phasengeschwindigkeit c angegeben, der Brechungsindex n :

$$n := \frac{c_0}{c} = c_0 \frac{|\vec{k}|}{\omega} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} \frac{|\vec{k}|}{\omega} \quad (1.5)$$

Wird diese Definition von n in die Wellengleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$\vec{k}^2 \vec{E} = \vec{k}^2 \frac{1}{n^2} \epsilon \vec{E}$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

Im isotropen Fall sind die einzigen Einschränkungen:

- Die Transversalität (erste Maxwellgleichung) fordert $\vec{k} \perp \vec{D} \Leftrightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$
- Aus der Wellengleichung folgt der Brechungsindex: $n = \sqrt{\epsilon}$

Der \vec{E} -Vektor darf in der Ebene senkrecht zu \vec{k} beliebig gewählt werden, so daß alle transversalen Polarisationsrichtungen³ möglich sind (Abbildung 1.3). Da dabei der Brechungsindex n und damit die Phasengeschwindigkeit c der Welle konstant bleiben, ist die Überlagerung linear polarisierter Wellen zu elliptisch polarisiertem Licht möglich.

1.1.2 Allgemeine Lösung

Wird die Definition (1.5) des Brechungsindex n in die allgemeine Wellengleichung eingesetzt, so lautet diese:

$$(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - \vec{k}^2 \vec{E} = -\vec{k}^2 \frac{1}{n^2} \vec{\epsilon} \vec{E} \quad (1.6)$$

³ In dieser Arbeit wird, wie auch in [12], die Polarisationsrichtung über die Richtung von \vec{E} definiert. In älterer Literatur wird die Polarisationsrichtung meist über die Richtung von \vec{H} definiert. Die Richtung von \vec{E} wird dort Schwingungsebene genannt.

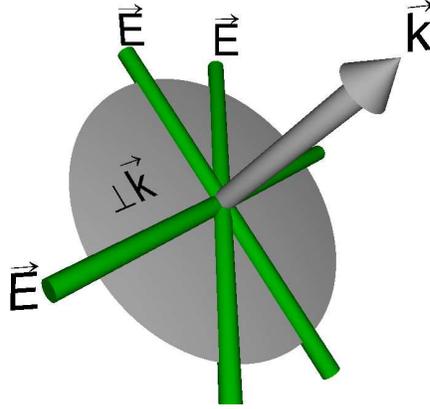


Abbildung 1.3:

Im isotropen Fall ist das \vec{E} -Feld nur auf die Ebene senkrecht zu \vec{k} eingeschränkt.

Im Gegensatz zur isotropen Lösung sind die drei Komponenten der Wellengleichung i.a. nicht linear voneinander abhängig. Die i -te Komponente der Gleichung lautet dann⁴

$$k_i(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{k}^2 E_i = -\vec{k}^2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \epsilon_{ii} E_i$$

Aus $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$ folgt⁵: $\vec{k} \cdot \vec{E} = k_3 E_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}\right)$

$$\text{Dies eingesetzt ergibt: } k_i k_3 E_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}\right) + E_i \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_{ii}}{n^2} - 1\right) = 0$$

In Matrixform lauten die drei Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1\right) & 0 & k_1 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}\right) \\ 0 & \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1\right) & k_2 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}\right) \\ 0 & 0 & k_3^2 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}\right) + \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1\right) \end{pmatrix} \cdot \vec{E} = \vec{0}$$

Eine nichttriviale Lösung dieses linearen, homogenen Gleichungssystems existiert, falls die Determinante der Matrix verschwindet. Dies ist für zwei Werte von n der Fall⁶, die im folgenden ordentlich (n_O) bzw. außerordentlich (n_{AO}) genannt werden:

⁴ Im Koordinatensystem $\vec{OA} = \vec{e}_3$

⁵ Herleitung in Anhang A.1

⁶ siehe Anhang A.2

$$n_O = \sqrt{\epsilon_O} \quad \vee \quad n_{AO}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}}$$

Um herauszufinden, wie die Lösung der Wellengleichung für $n = n_O$ bzw. $n = n_{AO}$ lautet, muß das entsprechende n wieder in die Wellengleichung eingesetzt und diese dann gelöst werden.

1.1.3 Ordentliche Lösung

Die Lösung der Wellengleichung, die man für

$$n_O = \sqrt{\epsilon_O} \tag{1.7}$$

erhält, wird ordentliche Lösung genannt. Wird in der Wellengleichung $n = n_O$ eingesetzt, so liefert sie nur dann eine Lösung, wenn $E_{O3} = 0$ gilt⁷. Das bedeutet, daß das elektrische Feld der Welle keine Komponente in Richtung der optischen Achse \vec{OA} haben darf. Wie bereits am Anfang erwähnt, findet in diesem Fall keine Verkipfung zwischen \vec{E}_O und \vec{D}_O statt:

$$\vec{D}_O = \epsilon_o \begin{pmatrix} \epsilon_O & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_O & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{AO} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{O1} \\ E_{O2} \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_o \epsilon_O \vec{E}_O \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_O \parallel \vec{D}_O = \begin{pmatrix} D_{O1} \\ D_{O2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung läßt sich damit auch so formulieren, daß D_O keine Komponente in Richtung der optischen Achse haben darf.

Es müssen also drei Bedingungen erfüllt sein:

- Die erste Maxwellgleichung fordert $\vec{k} \perp \vec{D}_O \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}_O$
- Die Wellengleichung fordert sowohl $n_O = \sqrt{\epsilon_O}$
- als auch $E_O \perp \vec{OA} \Rightarrow D_O \perp \vec{OA}$

Damit ist die Polarisationsrichtung nicht mehr frei wählbar, sondern auf die Schnittgerade der beiden Flächen beschränkt, die senkrecht auf \vec{k} bzw. auf \vec{OA} stehen (Abbildung 1.4). Dies ist der entscheidende Unterschied zur isotropen Lösung.

Von dieser Einschränkung abgesehen, verhält sich der Strahl wie im isotropen Medium, also „ordentlich“: Weder sind \vec{E} und \vec{D} verkippt, noch hängt der Brechungsindex von der Richtung von \vec{k} ab.

⁷Rechnung in Anhang A.3

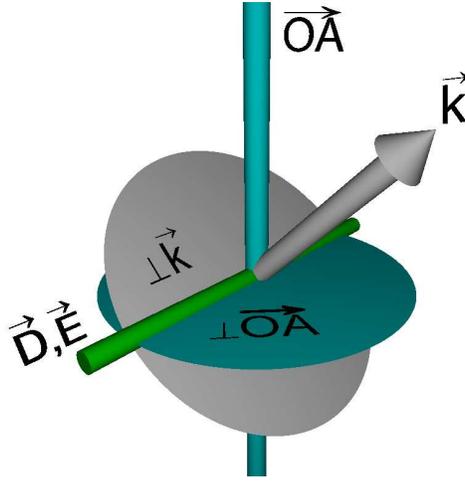


Abbildung 1.4:

Ordentliche Lösung: Die Richtung von \vec{E} ist auf die Schnittgerade der Ebenen senkrecht zu \vec{k} und senkrecht zu \vec{OA} beschränkt.

1.1.4 Außerordentliche Lösung

Setzt man

$$n_{AO}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}} \quad (1.8)$$

in die Wellengleichung ein, erhält man die außerordentliche Lösung. Als Lösungsbedingung erhält man⁸:

$$D_{AO1} k_2 - D_{AO2} k_1 = \epsilon_o \epsilon_O (E_{AO1} k_2 - E_{AO2} k_1) = 0$$

Um eine anschaulichere Beschreibung dieser Bedingung anzugeben, muß zunächst der Hauptschnitt definiert werden: Er ist die Ebene, die die optische Achse \vec{OA} und die Wellennormale \vec{k} aufspannen.

Seine Flächennormale ist somit $\vec{HS} = \vec{k} \times \vec{OA}$. In dem hier verwendeten Koordinatensystem ($\vec{OA} = \vec{e}_3$) ergibt sich ($\vec{HS} = (k_2, -k_1, 0)$):

$$D_{AO1} k_2 - D_{AO2} k_1 = \vec{D}_{AO} \cdot \vec{HS} = 0 = \vec{E}_{AO} \cdot \vec{HS}$$

Die anschaulichere Lösungsbedingung lautet damit: $\vec{HS} \perp \vec{D}_{AO}$ und $\vec{HS} \perp \vec{E}_{AO}$, d.h. \vec{D} - und \vec{E} -Feld schwingen im Hauptschnitt.

⁸Herleitung in Anhang A.4

Es müssen also wieder drei Bedingungen erfüllt sein:

- Die erste Maxwellgleichung fordert: $\vec{D}_{AO} \perp \vec{k}$
- Die Wellengleichung fordert sowohl $n_{AO}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}}$
- als auch $\vec{D}_{AO} \perp \vec{HS} \Leftrightarrow \vec{E}_{AO} \perp \vec{HS}$

Die Richtung des \vec{D} -Feldes ist auf die Schnittgerade eingeschränkt, die der Hauptschnitt und die Fläche senkrecht zu \vec{k} bilden. Damit liegen auch die Richtung des \vec{E} -Feldes und somit die Polarisationsrichtung fest: $\vec{E}_{AO} = \frac{1}{\epsilon_O} \vec{\epsilon}^{-1} \vec{D}_{AO}$

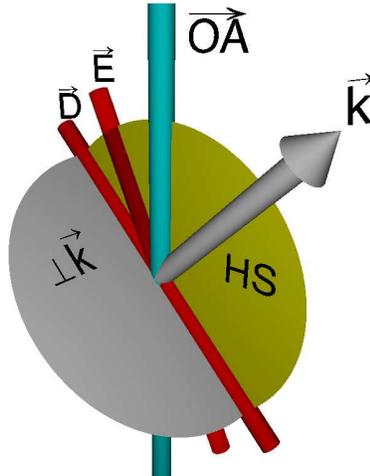


Abbildung 1.5:

Außerordentliche Lösung: Die Richtung von \vec{D} ist auf die Schnittgerade des Hauptschnitts und der Ebene senkrecht zu \vec{k} beschränkt. \vec{E} liegt ebenfalls im Hauptschnitt ($\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_O} \vec{\epsilon}^{-1} \vec{D}$).

Der Brechungsindex n_{AO} hat im Gegensatz zur isotropen oder ordentlichen Lösung die Eigenschaft, von der Richtung der Wellennormalen \vec{k} abzuhängen: Er variiert dabei zwischen den Extremen $n_{AO}^* = \sqrt{\epsilon_{AO}}$ für den Fall, daß \vec{k} senkrecht auf der optischen Achse steht und $n_O = \sqrt{\epsilon_O}$ für den Fall, daß \vec{k} in Richtung der optischen Achse zeigt. Sei θ_k der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{OA} . Dann läßt sich die Richtungsabhängigkeit auch folgendermaßen schreiben:

$$n_{AO}(\theta_k) = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{\epsilon_O \sin^2 \theta_k + \epsilon_{AO} \cos^2 \theta_k}} \quad (1.9)$$

Damit gilt in optisch positiven bzw. negativen Medien:

$$\text{optisch positiv: } (\epsilon_{AO} > \epsilon_O) \quad \sqrt{\epsilon_O} = n_O \leq n_{AO} \leq n_{AO}^* = \sqrt{\epsilon_{AO}}$$

$$\text{optisch negativ: } (\epsilon_{AO} < \epsilon_O) \quad \sqrt{\epsilon_{AO}} = n_{AO}^* \leq n_{AO} \leq n_O = \sqrt{\epsilon_O}$$

Abbildung 1.6 zeigt anhand eines hypothetischen, optisch negativen Beispielkristalls mit $n_O = 2.4$, $n_{AO}^* = 1.8$ die Abhängigkeit $n_{AO}(\theta_k)$.

Dieser Kristall wird in der Arbeit noch öfter vorkommen, da die Auswirkungen verschiedener Effekte durch seine extrem starke Doppelbrechung gut zu erkennen sind.

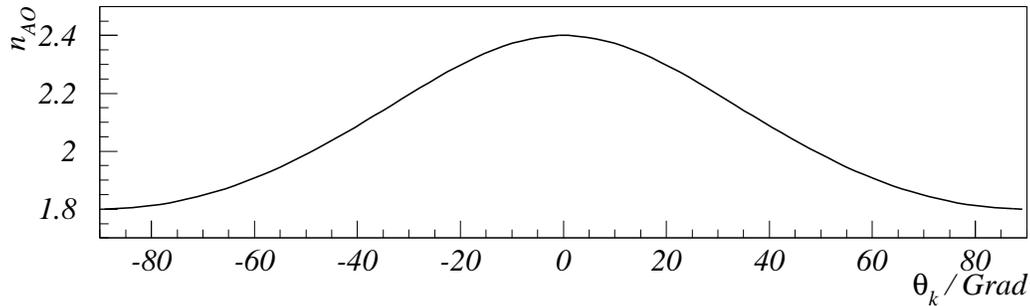


Abbildung 1.6:

Der Brechungsindex n_{AO} hängt vom Winkel θ_k zwischen \vec{k} und \vec{OA} ab (optisch negativ: $n_O = 2.4$, $n_{AO}^* = 1.8$)

Zusammenfassung:

- In allen Fällen wird die Wahl von \vec{D} durch die Transversalitätsbedingung auf $\vec{k} \perp \vec{D}$ eingeschränkt. Im isotropen und ordentlichen Fall gilt dies auch für \vec{E} , da hier die beiden Felder immer parallel sind. Im außerordentlichen Fall gilt dies im allgemeinen nicht: \vec{E} und \vec{D} sind nicht parallel, nur in den Spezialfällen $\vec{D} \parallel \vec{OA}$ oder $\vec{D} \perp \vec{OA}$ sind auch im außerordentlichen Fall \vec{E} und \vec{D} parallel.

- Im anisotropen Fall existieren bei gegebenem \vec{k} nur exakt zwei transversale linear polarisierte Wellen. Diese sind senkrecht zueinander polarisiert:

\vec{E}_O steht senkrecht auf \vec{k} und \vec{OA} , also parallel zur *Flächennormalen* des Hauptschnitts ($\vec{E}_O \parallel \vec{HS}$).

\vec{E}_{AO} liegt dagegen *im* Hauptschnitt ($\vec{E}_{AO} \perp \vec{HS}$), so daß ordentlicher und außerordentlicher Strahl stets senkrecht zueinander polarisiert sind.

- Da ordentliche und außerordentliche Welle einen unterschiedlichen Brechungsindex und damit eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen, ändert sich ihre Phasenlage zueinander ständig. Sie lassen sich deshalb *nicht* überlagern.⁹

⁹ Dies wird z.B. in der $\frac{\lambda}{4}$ -Platte ausgenutzt, in der das Licht senkrecht zur optischen Achse einfällt. Eine Hälfte des Lichts läuft als ordentlicher Strahl ($n = n_O$) durch den Kristall, die

- Im Fall $\vec{k} \parallel \vec{OA}$ ist die Doppelbrechung entartet. Es gilt $n_O = n_{AO} = \sqrt{\epsilon_O}$ und der Hauptschnitt ist nicht mehr definiert. Das anisotrope Medium verhält sich wie ein isotropes.

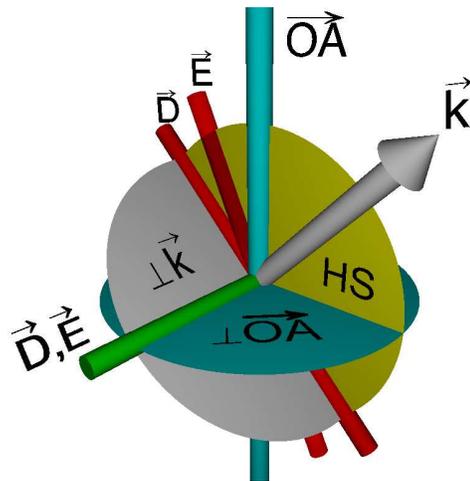


Abbildung 1.7: *Ordentlicher und außerordentlicher Strahl haben nur je eine mögliche Polarisationsrichtung und sind senkrecht zueinander polarisiert.*

andere Hälfte als außerordentlicher Strahl ($n = n_{AO}^*$). Nach Durchqueren des Kristalls der Dicke d vereinigen sie sich wieder mit der Phasendifferenz $\delta = 2\pi(n_O - n_{AO}^*)\frac{d}{\lambda}$.

1.2 Die Ausbreitungsrichtung der Welle

Die Richtung eines Lichtstrahles ist die Richtung des Energieflusses und somit des Poynting-Vektors $\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}$.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \cdot \vec{E}^2 - (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{E})$$

Im isotropen Fall gilt $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ und damit:

$$\vec{S} \parallel \vec{k}$$

Die Richtung des Lichtstrahles \vec{S} ist für isotrope Medien gleich der Richtung der Wellennormalen \vec{k} .

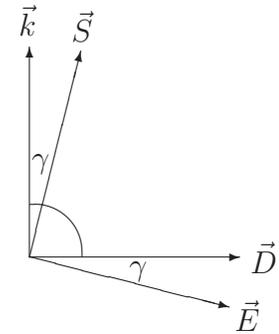
Im anisotropen Medium gilt dies nur für den ordentlichen Strahl.

Für den außerordentlichen Strahl gelten folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{Poynting: } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} &\Rightarrow \vec{S} \perp \vec{H} \quad \wedge \quad \vec{S} \perp \vec{E} \\ \text{Maxwell: } \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 &\Rightarrow \vec{k} \perp \vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{E} = \vec{H} &\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} = \vec{D} &\Rightarrow \vec{D} \perp \vec{H} \quad \wedge \quad \vec{k} \perp \vec{D} \end{aligned}$$

$\vec{S}, \vec{k}, \vec{E}$ und \vec{D} stehen alle senkrecht auf \vec{H} : Damit liegen sie alle in einer Ebene. Diese Ebene ist gleich dem Hauptschnitt, da \vec{k} und \vec{D} in diesem liegen.¹⁰

Weiter sieht man, daß $\vec{E} \perp \vec{S}$ und $\vec{k} \perp \vec{D}$ gilt. Somit sind \vec{k} und \vec{S} beim außerordentlichen Strahl nicht mehr parallel. Der Winkel γ zwischen \vec{k} und \vec{S} ist gleich dem zwischen \vec{D} und \vec{E} , wie nebenstehende Skizze zeigt.



¹⁰ In Abschnitt 1.1.4 wurde gezeigt, daß D_{AO} im Hauptschnitt schwingt. \vec{k} liegt per Definition im Hauptschnitt

\vec{E} und \vec{D} lassen sich über den ϵ -Tensor leicht ineinander umrechnen. \vec{k} läßt sich zwar nicht in \vec{S} umrechnen und umgekehrt¹¹, aber aus der Richtung von \vec{k} läßt sich sehr wohl die Richtung von \vec{S} errechnen und umgekehrt:

Die Richtungen von \vec{E}_{AO} und \vec{H}_{AO} sind eindeutig festgelegt und damit auch die Richtung von $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$:

$$E_{AO} \parallel \vec{\epsilon}^{-1} D_{AO} \Rightarrow E_{AO} \parallel \vec{\epsilon}^{-1} [\vec{k} \times \overrightarrow{HS}] \Rightarrow E_{AO} \parallel \vec{\epsilon}^{-1} [\vec{k} \times (\vec{k} \times \overrightarrow{OA})]$$

$$\vec{H}_{AO} \parallel \overrightarrow{HS} \Rightarrow H_{AO} \parallel \vec{k} \times \overrightarrow{OA}$$

Damit läßt sich die Richtung des Poynting-Vektors \vec{S} bestimmen:

$$\vec{S} \parallel \left[\vec{\epsilon}^{-1} \left((\vec{k} \times \overrightarrow{OA}) \times \vec{k} \right) \right] \times [\vec{k} \times \overrightarrow{OA}]$$

Ausrechnen des Terms¹² liefert die Beziehung:

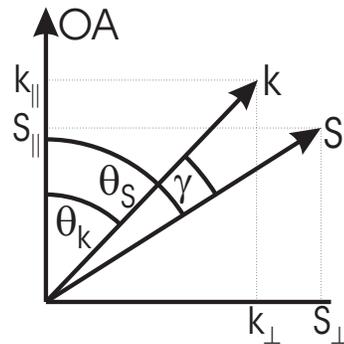
$$\vec{S} \parallel \vec{\epsilon} \vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} \parallel \vec{\epsilon}^{-1} \vec{S}$$

Die Verkippung¹³ γ von \vec{k} und \vec{S} folgt also dem gleichen Zusammenhang wie die zwischen \vec{E} und \vec{D} .

Stärke der Verkippung

Sei θ_k der Winkel zwischen \overrightarrow{OA} und \vec{k} , k_{\parallel} die Komponente parallel zur optischen Achse und k_{\perp} die Komponente senkrecht dazu, θ_S , S_{\parallel} und S_{\perp} entsprechend.

Dann gilt:



$$\tan(\theta_k) = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}}, \quad \tan(\theta_S) = \frac{S_{\perp}}{S_{\parallel}} = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \frac{\epsilon_O}{\epsilon_{AO}} = \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \left(\frac{n_O}{n_{AO}^*} \right)^2$$

¹¹ Wellenzahl und Intensität sind unabhängig voneinander

¹² siehe Anhang A.5

¹³ Die Verkippung ist ein weiterer Grund, warum sich ordentliche und außerordentliche Welle nicht überlagern lassen: Die beiden Wellen haben eine unterschiedliche Ausbreitungsrichtung.

Die Stärke der Verkipfung $\gamma := \theta_k - \theta_S$ lautet damit:

$$\gamma = \theta_k - \arctan \left(\tan(\theta_k) \left(\frac{n_O}{n_{AO}^*} \right)^2 \right) \quad (1.10)$$

In der Nähe von $\theta_k = \pm 45^\circ$ wird die Verkipfung maximal und erreicht den Wert γ_{max} (Abbildung 1.8).

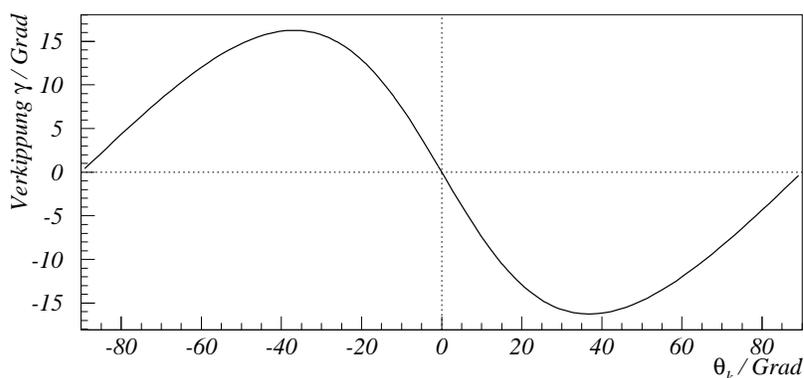


Abbildung 1.8: Stärke und Richtung der Verkipfung γ hängen vom Winkel θ_k zwischen \vec{k} und \vec{OA} ab ($n_O = 2.4$, $n_{AO}^* = 1.8$)

Die Größe der maximalen Verkipfung γ_{max} hängt von der Stärke der Doppelbrechung $\frac{n_{AO}^*}{n_O}$ ab. Für einige bekannte Materialien und den Beispielkristall beträgt sie bei $\lambda = 589.3nm$ [8, 17]:

Material	n_{AO}^*	n_O	$\frac{n_{AO}^*}{n_O}$	$\gamma_{max}/Grad$
PbWO ₄	2.17	2.24	0.969	-2.5
Kalkspat	1.486	1.658	0.896	-6.1
Quarz	1.553	1.544	1.006	+0.4
Rutil (TiO ₂)	2.903	2.616	1.110	+5.7
Beispielkristall	1.800	2.400	0.75	-13.0

Man kann sich anschaulich merken, daß bei optisch negativen Kristallen ($n_O > n_{AO}^*$) die optische Achse „abstoßend“ auf den Strahl wirkt, d.h. der Winkel zwischen optischer Achse und Strahl ist größer als der Winkel zwischen optischer Achse und der Wellennormalen. Für optisch positive Kristalle gilt das Gegenteil.

1.3 Strahlgeschwindigkeit

Sind \vec{k} und die Strahlrichtung \vec{S} nicht parallel, wie dies i.a. beim außerordentlichen Strahl der Fall ist, so sind Strahlgeschwindigkeit c_S und Geschwindigkeit der Wellenfront c_k nicht gleich:

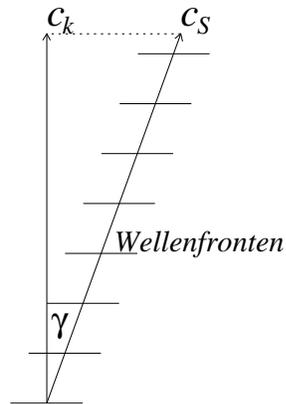


Abbildung 1.9:

Die Verkipfung von \vec{k} und \vec{S} um den Winkel γ führt zu einer höheren Strahlgeschwindigkeit c_S gegenüber der Geschwindigkeit c_k der Wellenfronten \vec{k} .

Man erkennt, daß die Strahlgeschwindigkeit – in Abhängigkeit von der Stärke der Verkipfung γ – größer als die Normalengeschwindigkeit der Wellenfronten ist.

$$c_S = \frac{c_k}{\cos \gamma} \quad (1.11)$$

Analog zum Brechungsindex n , der sich auf die Phasengeschwindigkeit (= Geschwindigkeit der Wellenfronten) bezieht, läßt sich der „Strahlindex“ n_S definieren:

$$n_S := \frac{c_o}{c_S} = \frac{c_o}{c_k} \cos \gamma = n \cdot \cos \gamma \quad (1.12)$$

Die Differenz zwischen n und n_S ist selbst bei stark doppelbrechenden Medien gering, so daß sie in vielen Fällen vernachlässigt werden kann. So beträgt sie z.B. beim stark doppelbrechenden Kalkspat ($\gamma_{max} = 6.1^\circ$) nur 0.55%.

1.4 Brechungs- und Reflexionsgesetz

Betrachtet werden die *Richtungen* von reflektierten und transmittierten Strahlen am Übergang zwischen doppelbrechendem Medium und isotropem Medium:

Das Problem ist am einfachsten in dem Koordinatensystem zu lösen, dessen Ursprung in der Grenzfläche zwischen den beiden Medien liegt und in dem für die Flächennormale \vec{N} der Grenzfläche gilt: $\vec{N} = \vec{e}_3$. Außerdem soll für die Wellennormale \vec{k} des einfallenden Strahls gelten: $k_2 = 0$. Beide Bedingungen sind immer durch eine Koordinatentransformation erreichbar. Damit verliert der ϵ -Tensor $\vec{\epsilon}$ aber auch seine einfache Hauptachsengestalt.

Im folgenden sind die gestrichenen Größen die Größen der auslaufenden Welle (\vec{k}', \vec{S}'), die ungestrichenen die der einfallenden Welle (\vec{k}, \vec{S}). Der Einfallswinkel wird α bezeichnet, die Ausfallswinkel β .

Die Lösung des Brechungs- und Reflexionsgesetzes folgt aus der Erfüllung der Phasenanschlußbedingung. Diese besagt, daß die Phase der einfallenden und der auslaufenden Welle auf der Grenzfläche zu allen Zeiten t und an allen Orten der Fläche ($\vec{r}_{\parallel} = (r_1, r_2, 0)$) gleich sein muß¹⁴, um die Stetigkeitsbedingungen der Felder erfüllen zu können. Das Gesetz gilt also für transmittierte *und* reflektierte Welle gleichermaßen.

Damit lautet die Phasenanschlußbedingung:

$$\vec{k}\vec{r} - \omega t = \vec{k}'\vec{r} - \omega' t \quad \forall \quad r_1, r_2, t \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = k'_1 \wedge k_2 = k'_2 \wedge \omega = \omega'$$

Für die beiden Tangentialkomponenten von \vec{k} folgt somit: $\boxed{\vec{k}_{\parallel} = \vec{k}'_{\parallel}}$

Das bedeutet, daß sämtliche \vec{k} in der Einfallsebene bleiben. In diesem Koordinatensystem gilt also insbesondere für alle \vec{k}' : $k'_2 = 0$.

k'_3 ergibt sich aus der Bedingung $\omega = \omega'$ ($k_0 =$ Vakuumwellenzahl):

$$\omega = \omega' \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{k}_0| = |\vec{k}'_0| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|\vec{k}|}{n} = \frac{|\vec{k}'|}{n'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{k_{\parallel}^2 + k_3^2}}{n} = \frac{\sqrt{k_{\parallel}^{\prime 2} + k_3^{\prime 2}}}{n'}$$

Das Vorzeichen von k'_3 ist damit noch nicht bestimmt: Beim transmittierten Strahl haben k_3 und k'_3 das gleiche Vorzeichen, beim reflektierten das umgekehrte.¹⁵ Somit sind alle drei Komponenten von \vec{k} eindeutig bestimmt.

An der Grenzfläche zwischen isotropem und anisotropem Medium sind nun folgende Fälle möglich (Eine Welle im isotropen Medium wird hier auch als ordentlich bezeichnet):

¹⁴ Eventuelle Phasenverschiebungen oder Phasensprünge des \vec{E} -Feldes folgen *nicht* aus dem Reflexions- und Brechungsgesetz, sondern aus den Fresnelformeln.

¹⁵ Ist einer der beiden Strahlen außerordentlich, gilt dies nicht immer. (Abschnitt 1.4.1)

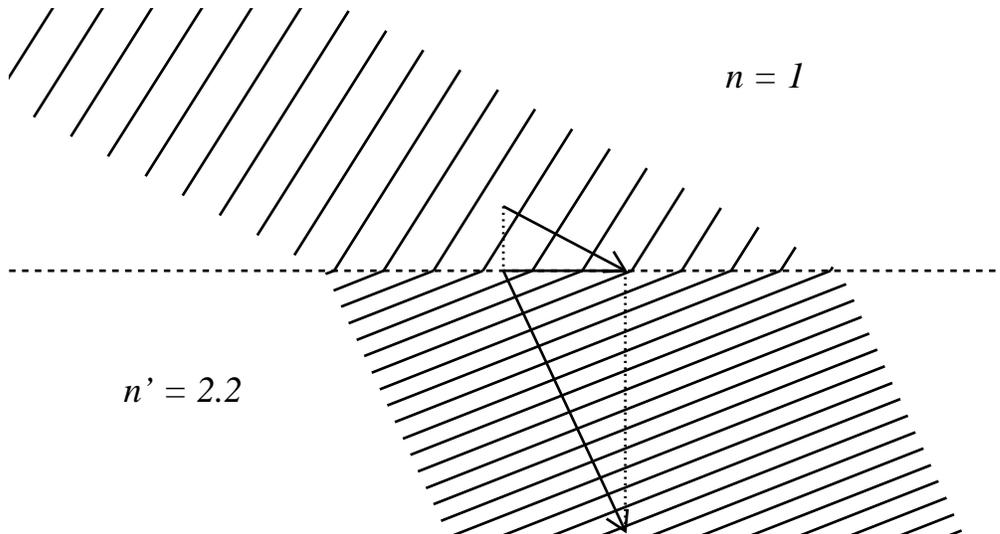


Abbildung 1.10: Die Wellenfronten gehen stetig durch die Grenzfläche. Die Tangentialkomponenten des Wellenvektors bleiben erhalten.

Übergang	Einlaufend	Auslaufend	
		reflektiert	transmittiert
isotrop \rightarrow anisotrop	ordentlich	ordentlich	ordentlich + außerord.
anisotrop \rightarrow isotrop	ordentlich	ordentlich + außerord.	ordentlich
	außerord.	außerord. + ordentlich	ordentlich

Daß der Strahl beim Eintritt in ein anisotropes Medium aufspaltet, ist bekannt und in Bild 1.1 auf Seite 6 zu sehen. Wie im folgenden gezeigt wird, spaltet der Strahl auch bei Reflexion an der Innenseite des anisotropen Mediums in zwei Strahlen auf.

Da sich eine Welle im isotropen Medium genauso verhält wie eine ordentliche im anisotropen Medium (bis auf die Einschränkung der Polarisationsrichtung, die für das Reflexions- und Brechungsgesetz aber irrelevant ist) und für Reflexion wie Transmission die gleiche Phasenanschlußbedingung gilt, lassen sich die neun Fälle aus der Tabelle in vier Kategorien einteilen:

1. ordentlich \rightarrow ordentlich

2. außerordentlich \rightarrow ordentlich
3. ordentlich \rightarrow außerordentlich
4. außerordentlich \rightarrow außerordentlich

Die Lösungen¹⁶ der Gleichung $\frac{|\vec{k}|}{n} = \frac{|\vec{k}'|}{n'}$ lautet:

1. ordentlich \rightarrow ordentlich

$$k'_3 = \pm \sqrt{n'^2 \frac{\vec{k}^2}{n^2} - k_1^2}, \quad k'_1 = k_1 \quad (1.13)$$

Dies ist das bekannte Snellius'sche Brechungsgesetz $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n'}{n}$. Bei Reflexion gilt $n = n'$ und damit $k'_3 = -k_3$. Daher ist in diesem Spezialfall das bekannte Reflexionsgesetz Einfallswinkel = Ausfallswinkel gültig.

2. außerordentlich \rightarrow ordentlich

Die Lösung ist sehr ähnlich: Für n wird der aus der Wellengleichung bekannte Brechungsindex $n_{AO} = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}}$ eingesetzt. Daraus folgt:

$$k'_3 = \pm \sqrt{n'^2 \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_O \epsilon_{AO}} - k_1^2}, \quad k'_1 = k_1 \quad (1.14)$$

3. ordentlich \rightarrow außerordentlich

$$k'_3 = \frac{1}{\epsilon_{33}} \left(-\epsilon_{13} k_1 \pm \sqrt{\epsilon_O \epsilon_{AO} \epsilon_{33} \frac{\vec{k}^2}{n^2} + k_1^2 (\epsilon_{13}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{33})} \right), \quad k'_1 = k_1 \quad (1.15)$$

4. außerordentlich \rightarrow außerordentlich

Dieser Fall kann nur bei Reflexion innerhalb des anisotropen Mediums vorkommen, da das angrenzende Medium isotrop ist. Die Lösung lautet:

$$k'_3 = -k_3 - 2 \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1, \quad k'_1 = k_1 \quad (1.16)$$

¹⁶Rechnung in Anhang A.6

Das Reflexions- und Brechungsgesetz liefert für alle vier Fälle eine Lösung. Damit ist eine Aufspaltung bei Reflexion an der Innenseite des anisotropen Mediums prinzipiell möglich¹⁷. Abbildung 1.11 zeigt, daß die Aufspaltung auch tatsächlich stattfindet.

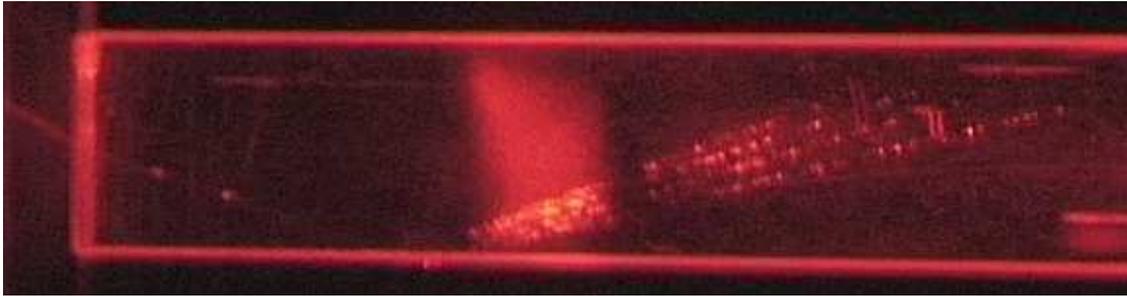


Abbildung 1.11: *Ein Laserstrahl fällt von links unter einem Winkel in den PbWO_4 -Kristall ein und spaltet dabei zunächst in zwei Strahlen auf. (Die Aufspaltung geschieht in die Tiefe und ist daher kaum zu erkennen.) Bei der Reflexion an der Innenseite spalten die beiden Strahlen dann in insgesamt vier Strahlen auf.*

1.4.1 Besonderheiten der Lösungen

„verhinderte Reflexion“

Ein wichtiger Unterschied zwischen isotropen und anisotropen Medien liegt darin, daß das anisotrope Medium zwei verschiedene Brechungsindizes (n_O, n_{AO}) besitzt, wobei $n_{AO}(\vec{k})$ auch noch richtungsabhängig ist.

Bei isotropen Medien ist eine Änderung des Brechungsindex für einen Strahl nur bei einem Wechsel des Mediums möglich, was nur den transmittierten Strahl betrifft.

Im anisotropen Medium kann sich dagegen auch für den reflektierten Strahl der Brechungsindex ändern, falls ein außerordentlicher Strahl ordentlich reflektiert wird ($n_{AO} \rightarrow n_O$) oder umgekehrt ($n_O \rightarrow n_{AO}$). Selbst bei der Reflexion außerordentlich \rightarrow außerordentlich ändert sich der richtungsabhängige Brechungsindex $n_{AO}(\vec{k})$.

Wechselt nun ein Strahl von einem optisch dichteren Medium in ein optisch dünneres und ist der Einfallswinkel dabei groß genug, so liefert das Brechungs- und Reflexi-

¹⁷Daß das Reflexions- und Brechungsgesetz zwei (unterschiedliche) Lösungen für reflektierte Strahlen liefert, ist notwendige Voraussetzung für eine Strahlaufspaltung. Aber nur, wenn die Energie des einfallenden Strahls auch auf beide Lösungen aufgeteilt wird, sieht man zwei Strahlen.

angesetzt eine komplexe Lösung für k'_z . Das bedeutet, daß die Welle exponentiell gedämpft ist und sich folglich nicht mehr ausbreiten kann:¹⁸



Betrifft dies den transmittierten Strahl, so spricht man im isotropen wie anisotropen Fall von Totalreflexion.

Im anisotropen Fall kann darüberhinaus auch einer der beiden reflektierten Strahlen verschwinden, falls der einfallende Strahl einen höheren Brechungsindex besitzt als der reflektierte.

Abbildung 1.12 zeigt am Beispiel des optisch negativen Beispielkristalls ($n_O = 2.4$, $n_{AO}^* = 1.8$), was geschieht, wenn der Einfallswinkel eines ordentlichen Strahls zunimmt: Für kleine Einfallswinkel existieren zwei reflektierte und ein transmittierter Strahl (I). Da der transmittierte Strahl die größte Brechungsindexdifferenz überwinden muß ($n_O = 2.4 \rightarrow n = 1.0$), verschwindet er bei zunehmendem Einfallswinkel als erster (Totalreflexion, (II)). Der ordentlich reflektierte besitzt stets den gleichen Brechungsindex wie der einfallende, so daß er immer vorhanden ist. Der außerordentliche hat dagegen einen kleineren Brechungsindex ($n_{AO} = 1.8 \dots 2.4$), so daß die Lösung bei hinreichend großem Einfallswinkel komplex wird und auch dieser Strahl verschwindet (III). Da für dieses Phänomen in der Literatur kein eigener Name vorhanden ist, wird es im folgenden „verhinderte Reflexion“ genannt.

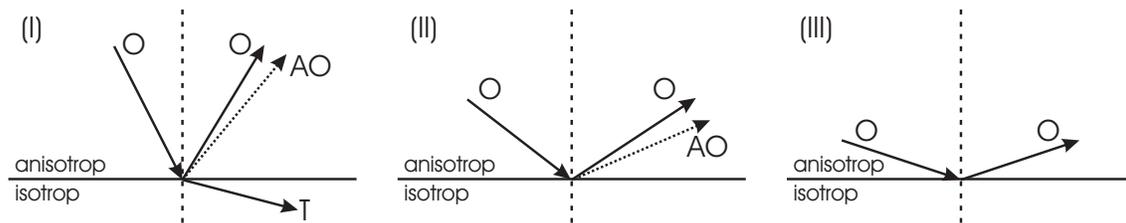


Abbildung 1.12: *Nimmt der Einfallswinkel zu, verschwinden zunächst der transmittierte und dann der außerordentliche Strahl*

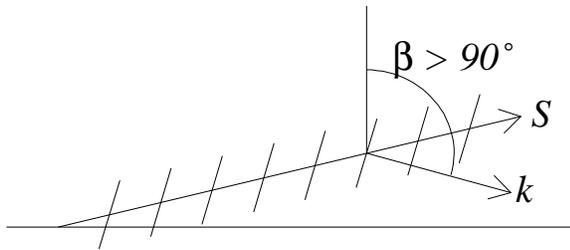
Die „verhinderte Reflexion“ tritt jedoch nicht bei der Reflexion außerordentlich \rightarrow außerordentlich auf: Je größer der Einfallswinkel wird, desto weniger unterscheiden sich die Richtungen von einfallendem und auslaufendem Strahl, so daß sich auch ihre

¹⁸ Die Lösungen (1.13) und (1.14) ermöglichen nur eine rein imaginäre Lösung (exponentieller Abfall), in Lösung (1.15) kann auch noch ein zusätzlicher Realteil dazukommen, was einer exponentiell gedämpften Welle entspricht

Brechungsindizes immer mehr angleichen. Damit ist der Übergang optisch dicht \rightarrow optisch dünn nicht mehr gegeben. Mathematisch zeigt sich dies auch an Lösung (1.16): k'_3 kann niemals komplex werden.

Ausfallswinkel $\beta > 90^\circ$

Eine weitere ungewöhnliche Eigenschaft der Lösungen im Fall (1.15) und (1.16) ist, daß k'_3 für große Einfallswinkel (k_1 groß) das Vorzeichen wechseln kann, was einem Ausfallswinkel β der Wellennormalen \vec{k} von über 90° entspricht. Diese scheinbare Unmöglichkeit läßt sich leicht erklären, wenn man berücksichtigt, daß die Ausbreitungsrichtung \vec{S} des Strahls nicht mit der aus dem Brechungs- und Reflexionsgesetz berechneten Richtung von \vec{k} übereinstimmt:



Obwohl die Richtung des reflektierten Strahls \vec{S} von der Oberfläche wegweist, zeigt die Wellennormale \vec{k} in Richtung der Oberfläche.¹⁹

1.4.2 Anwendung des Brechungs- und Reflexionsgesetzes

Die Anwendung des Brechungs- und Reflexionsgesetzes ist im isotropen Fall einfach: Da \vec{S} und \vec{k} parallel sind, kann direkt die Strahlrichtung in das Gesetz eingesetzt werden.

Ist dagegen ein Medium anisotrop, so sind mehrere Schritte notwendig:

1. Bestimmung der Art des einfallenden Strahls (ordentlich / außerordentlich)
2. Berechnung der Richtung von \vec{k} aus der Richtung von \vec{S}
3. Anwendung des Brechungs- und Reflexionsgesetzes ($\vec{k} \rightarrow \vec{k}'$)
4. Berechnung der Richtung von \vec{S}' aus der Richtung von \vec{k}'

¹⁹Aus dem gleichen Grund kann es auch physikalisch sinnvoll sein, daß der Einfallswinkel von \vec{k} größer als 90° ist.

1.4.3 Darstellung des Brechungs- und Reflexionsgesetzes

In den folgenden Beispielen wird stets mit dem (wie PbWO_4) optisch negativen Beispielkristall gerechnet. Für Vergleiche mit einem isotropen Material wird ein mittlerer Brechungsindex \bar{n} ermittelt:

$$\bar{n} = \frac{n_O + \bar{n}_{AO}}{2}$$

Da n_{AO} richtungsabhängig ist, muß zunächst ein Mittelwert \bar{n}_{AO} berechnet werden, der sich aus Mittelung der Brechungsindizes (Gleichung 1.9) aller Strahlen, deren Richtung isotrop im Raum verteilt ist, ergibt²⁰:

$$\bar{n}_{AO} = \frac{1}{2} \int_0^\pi n(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_O \cdot \epsilon_{AO}}{\epsilon_{AO} - \epsilon_O}} \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon_{AO}} + \sqrt{\epsilon_{AO} - \epsilon_O}}{\sqrt{\epsilon_{AO}} - \sqrt{\epsilon_{AO} - \epsilon_O}} \right)$$

\bar{n}_{AO} liegt näher an n_{AO}^* als an n_O : Mit $n_O = 2.4$ und $n_{AO}^* = 1.8$ lautet der gemittelte außerordentliche Brechungsindex $\bar{n}_{AO} = 1.97$. Somit ergibt sich insgesamt ein Durchschnittswert von $\bar{n} \approx 2.2$. Bei Vergleichen mit isotropen Medien wird daher $\bar{n} = 2.2$ als Brechungsindex verwendet.

Um die ungewöhnlichen Eigenschaften der Doppelbrechung zu zeigen, wird in einem Koordinatensystem der Sinus des Einfallswinkels gegen den Sinus des Ausfallswinkels aufgetragen.

Isotroper Fall

Im isotropen Fall ist das Verhältnis der beiden konstant: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n'}{n}$. Damit ergibt sich für den reflektierten Strahl eine Ursprungsgerade mit der Steigung 1 und für den transmittierten Strahl eine Ursprungsgerade mit der Steigung $\frac{n}{n'}$. Ist $n > n'$, so ist die Steigung größer 1 und damit gibt es für große Einfallswinkel keinen transmittierten Strahl mehr (Totalreflexion). Abbildung 1.13 zeigt am Beispiel des isotropen Übergangs $n = 1.0 \rightarrow n' = 2.2$ diese Darstellungsweise. Transmission kann hier nur im Bereich $|\sin(\beta)| \leq \frac{1.0}{2.2} = 0.45$ stattfinden, jenseits davon wird der Strahl totalreflektiert.

Anisotroper Fall

Im doppelbrechenden Fall wird das Problem komplizierter: Es treten (neben dem einfallenden) i.a. drei Strahlen auf: Im isotropen Medium einer und im anisotropen Medium ein ordentlicher und ein außerordentlicher. Der Übersichtlichkeit halber

²⁰Herleitung in Anhang A.7

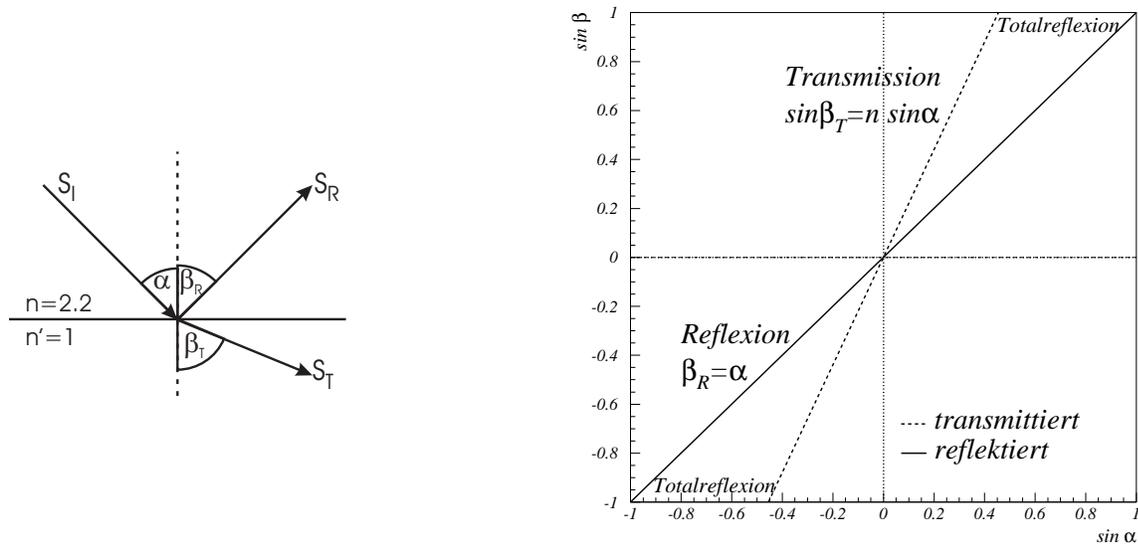


Abbildung 1.13:

Reflexions- und Brechungsgesetz $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n'}{n} = \frac{1.0}{2.2}$ im isotropen Fall
(Übergang optisch dicht \rightarrow optisch dünn)

werden im folgenden nur die beiden reflektierten Strahlen im anisotropen Medium gezeigt.²¹

Für den außerordentlichen Fall kann der Winkel mit der Flächennormale \vec{N} entweder zur Wellennormalen \vec{k} oder zur Strahlrichtung \vec{S} gemessen werden. Da in der Praxis die Strahlrichtung von Interesse ist, liegt es nahe, nur den Winkel zu \vec{S} zu nehmen. Da \vec{k} ein Zwischenergebnis bei der Berechnung von \vec{S} ist, wird in einigen Fällen zum besseren Verständnis des Ergebnisses aber auch die Auftragung gegen \vec{k} nützlich sein.

Im weiteren wird an einigen Beispielen das Reflexionsverhalten für den Übergang vom anisotropen zum isotropen Medium diskutiert. Der einfallende Strahl kann somit ein ordentlicher oder ein außerordentlicher Strahl sein. Beide Fälle werden getrennt dargestellt. Außerdem hängen die Gesetze noch von der Lage der optischen Achse ab. Es werden drei Beispiele mit unterschiedlichen Lagen der optischen Achse dargestellt und jeweils der Fall gezeigt, daß der einfallende Strahl ordentlich bzw. außerordentlich ist:

²¹ Der transmittierte Strahl im isotropen Medium verhält sich genauso wie der ordentliche im anisotropen, nur mit einer um den Faktor $\frac{n_0}{n'}$ größeren Steigung. Seine Darstellung liefert somit keine neuen Erkenntnisse.

1. Optische Achse senkrecht zur Oberfläche

Einfallender Strahl: ordentlich

Das Reflexionsverhalten für diesen Fall ist in Abbildung 1.14 zu sehen.

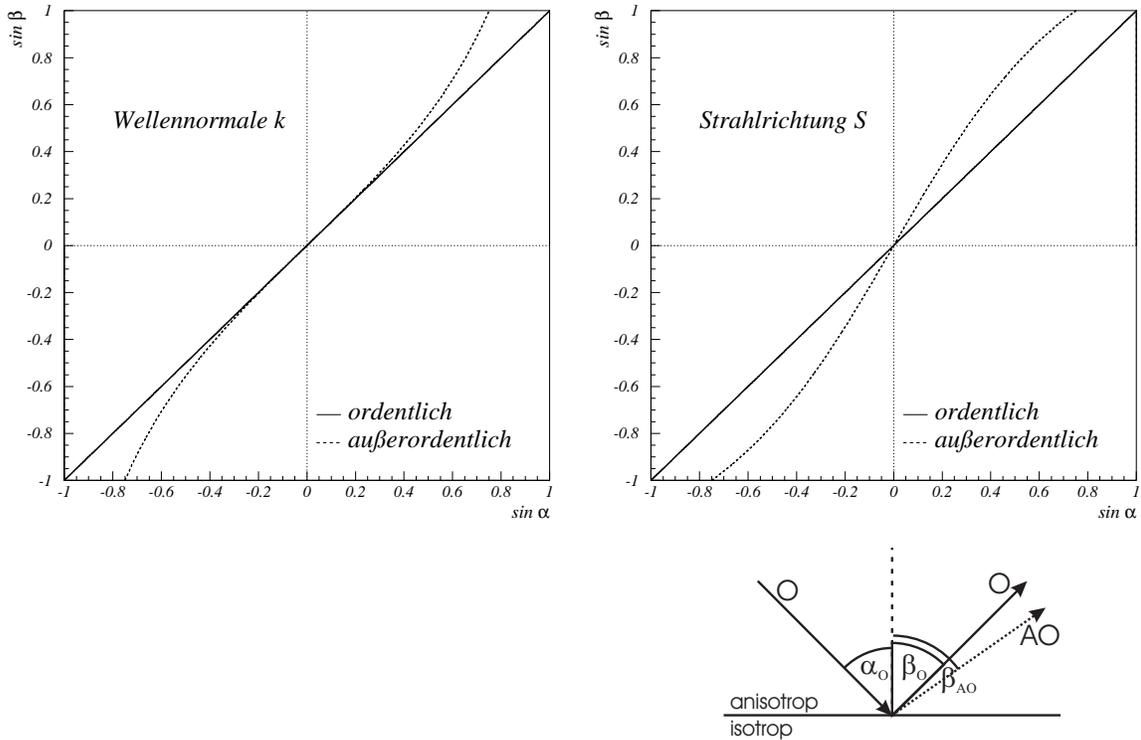


Abbildung 1.14:

einfallender Strahl ordentlich, \vec{OA} senkrecht zur Oberfläche: Der außerordentliche Strahl wird unter einem größeren Winkel als der ordentliche reflektiert und verschwindet für große Einfallswinkel.

Der ordentlich reflektierte Strahl hat den gleichen Brechungsindex n_O wie der einfallende. Da auch \vec{k} und \vec{S} nicht gegeneinander verkippt sind, gilt, wie auch in allen folgenden Beispielen bei der Reflexion ordentlich \rightarrow ordentlich: $\alpha_O = \beta_O$. Dies ergibt in der \vec{k} wie in der \vec{S} -Darstellung eine Ursprungsgerade mit der Steigung 1.

Das Verhalten des außerordentlichen Strahls wird durch zwei Effekte bestimmt:

- Da $n_{AO} \leq n_O$ gilt, sieht der außerordentliche Strahl ein optisch dünneres Medium. Nach dem Brechungs- und Reflexionsgesetz wird der Reflexionswinkel der Wellennormalen \vec{k} größer, so daß die Kurve betraglich über der ordentlichen Gerade liegt, wie in der \vec{k} -Darstellung (links) zu sehen ist.

Die Stärke dieses Effekts hängt sowohl vom Einfallswinkel²² als auch vom Brechungsindexunterschied ab. Der Brechungsindexunterschied zwischen n_O und n_{AO} wird erst bei großen Einfallswinkeln nennenswert; Damit sind beide Voraussetzungen für einen großen Winkelunterschied gegeben, so daß in diesem Winkelbereich die Differenz zwischen \vec{k}_O und \vec{k}_{AO} maximal ist.

Durch das Zusammentreffen von großem Brechungsindexunterschied optisch dicht \rightarrow optisch dünn und großem Einfallswinkel tritt der Effekt der „verhinderten Reflexion“ auf: Man erkennt für große Einfallswinkel, daß es für den außerordentlichen Strahl keine Lösung mehr gibt und nur noch der ordentliche reflektiert wird.

- Die Verkippung zwischen \vec{k} und \vec{S} geschieht bei optisch negativen Kristallen immer von der optischen Achse weg, was den Reflexionswinkel des Strahls vergrößert, da $\vec{OA} \parallel \vec{N}$ gilt. Dies sieht man in der \vec{S} -Darstellung (rechts): Die \vec{S} Kurve liegt betragsmäßig stets über der \vec{k} Kurve (links).

Die Verkippung zwischen \vec{k} und \vec{S} wirkt sich maximal aus, falls der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{OA} in der Nähe von 45° ist, was hier auch einem Ausfallswinkel von $\pm 45^\circ$ entspricht ($\sin(45^\circ) \approx 0.7$).

Beide Effekte wirken also immer in die gleiche Richtung²³, auch wenn sie in unterschiedlichen Winkelbereichen dominieren. Dadurch wird der außerordentliche Strahl insgesamt unter einem deutlich größeren Ausfallswinkel (d.h. flacher) reflektiert als der ordentliche.²⁴

Einfallender Strahl: außerordentlich

Abbildung 1.15 zeigt das Reflexionsverhalten für den Fall, daß der einfallende Strahl außerordentlich ist.

Jetzt gilt für den außerordentlich reflektierten Strahl: Einfallswinkel = Ausfallswinkel – trotz richtungsabhängigem Brechungsindex und Verkippung. Da der Winkel zwischen optischer Achse und einfallendem bzw. reflektiertem außerordentlichem Strahl jedoch stets gleich ist, sind sowohl der Brechungsindex als auch die Stärke der Verkippung für beide Strahlen immer dieselben.

Der ordentliche Strahl wird auch hier stets unter einem kleineren Winkel reflektiert als der außerordentliche, was wieder an den beiden sich addierenden Effekten des Brechungsindexunterschieds und der Verkippung des einfallenden außerordentlichen Strahls liegt.

Im Gegensatz zum ersten Beispiel gibt es hier keine „verhinderte Reflexion“, da der

²² bei senkrechtem Einfall tritt keine Winkeländerung ein, unabhängig von der Stärke des Brechungsindexunterschieds

²³ Bei optisch positiven Kristallen gilt dies ebenfalls, nur wirken dann beide Effekte in die andere Richtung

²⁴ Im isotropen Fall konnte man aus der Steigung der Kurve auf den Brechungsindexkoeffizienten $\frac{n}{n'}$ schließen. Dies geht hier nur noch in der \vec{k} -Darstellung.

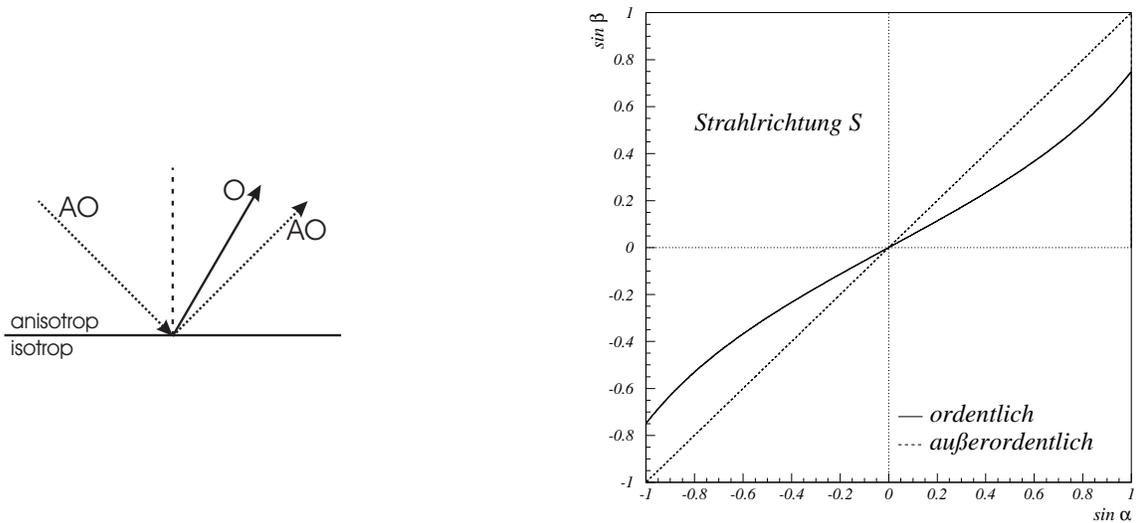


Abbildung 1.15:
*einfallender Strahl außerordentlich, \vec{OA} senkrecht auf Grenzfläche:
 Der ordentliche Strahl wird für alle Einfallswinkel steiler reflektiert
 als der außerordentliche.*

Brechungsindex des einfallenden außerordentlichen Strahls der niedrigere ist.

2. Optische Achse parallel zur Oberfläche

Einfallender Strahl: ordentlich

Dieser Fall ist in Abbildung 1.16 zu sehen.

Der ordentlich reflektierte Strahl verhält sich erwartungsgemäß, so daß in der \vec{k} wie in der \vec{S} -Darstellung wieder eine Ursprungsgerade mit Steigung 1 entsteht.

Um das Verhalten des außerordentlich reflektierten Strahls zu verstehen, werden wieder zwei Effekte betrachtet:

- Wie im vorigen Beispiel sorgt der Übergang optisch dicht \rightarrow optisch dünn dafür, daß die Wellennormale \vec{k} unter einem größeren Winkel reflektiert wird (Sie liegt in der \vec{k} -Darstellung betraglich immer über der Geraden für den ordentlichen Strahl). Da die optische Achse nun in der Grenzfläche liegt, wird der Brechungsindexunterschied für kleine Einfallswinkel maximal; Da dies aber auch der Bereich ist, in dem sich dies nur schwach auf die Winkel auswirkt, bleibt der Effekt insgesamt recht schwach.

Ein weiterer Unterschied zum ersten Beispiel ist, daß hier keine „verhinderte Reflexion“ auftritt, obwohl wieder ein Übergang optisch dicht \Rightarrow optisch dünn vorliegt. Da der Winkel θ zwischen optischer Achse und Strahl aber für zunehmende Einfallswin-

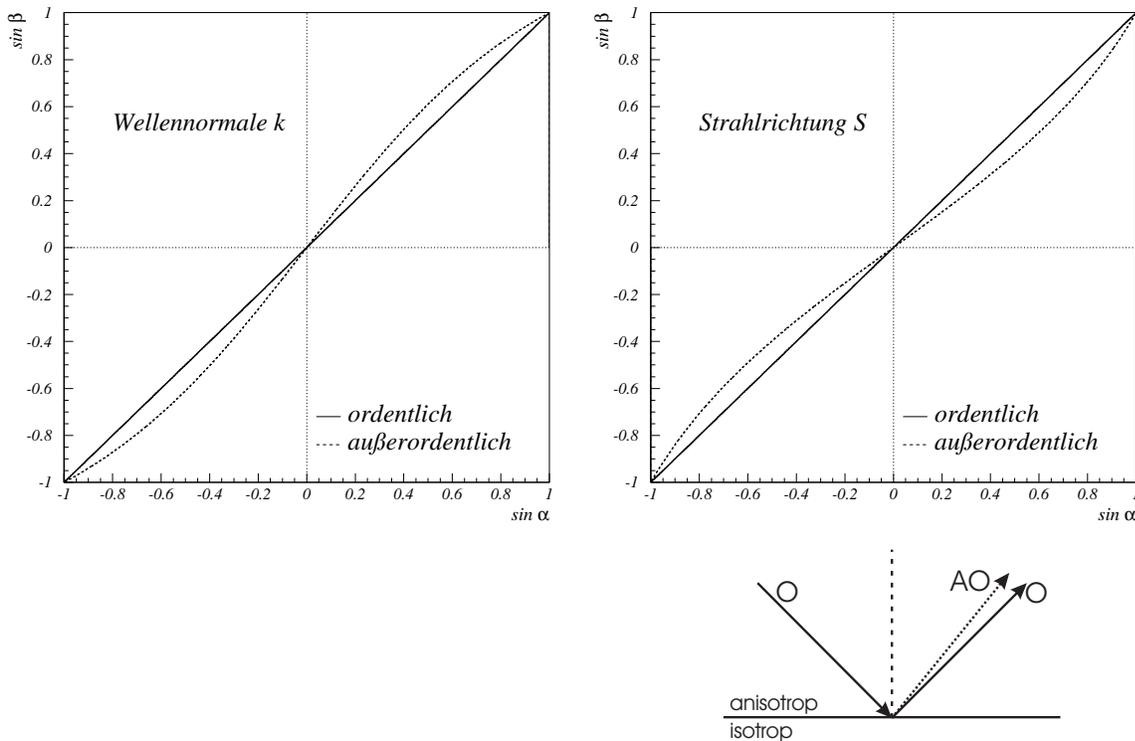


Abbildung 1.16:

einfallender Strahl ordentlich, \vec{OA} parallel zur Grenzfläche: Verkippung und Brechungsindexunterschied schwächen sich: Geringe Aufspaltung

kel gegen 0 geht, gleichen sich auch die Brechungsindizes an: $n_{AO} \rightarrow n_O$ (Entartung der Doppelbrechung). Damit entfällt die Voraussetzung für „verhinderte Reflexion“.

- Die Verkippung zwischen \vec{k} und \vec{S} geschieht, wie auch im ersten Beispiel, von der optischen Achse weg. Da die optische Achse hier aber in der Grenzfläche liegt, wird dadurch der Ausfallswinkel des Strahls \vec{S} kleiner als der der Wellennormalen \vec{k} . Vergleicht man die \vec{k} -Darstellung (links) mit der \vec{S} -Darstellung (rechts), so liegt die \vec{S} -Kurve betraglich immer unter der \vec{k} -Kurve.

Wie auch im ersten Beispiel ist die Stärke der Verkippung in der Nähe von $\pm 45^\circ$ maximal.

Wirken im ersten Beispiel beide Effekte in die gleiche Richtung, so wirken sie diesmal gegenläufig. Da aber der Effekt der Verkippung für alle Einfallswinkel stärker ist als der des Brechungsindexunterschieds, ist der Reflexionswinkel des außerordentlichen Strahls immer kleiner als der des ordentlich reflektierten. Im ersten Beispiel war das Gegenteil der Fall, wobei die Aufspaltung zwischen ordentlich und außerordentlich reflektierten Strahlen dort deutlich größer war.

Man muß sich also vor der Schlußfolgerung hüten, daß im optisch negativen Kristall ($n_{AO}^* < n_O$) der ordentliche Strahl stets unter einem kleineren Winkel reflektiert wird als der außerordentliche.

Einfallender Strahl: außerordentlich

Ist der einfallende Strahl außerordentlich, sieht das Reflexionsverhalten ähnlich aus, wie Abbildung 1.17 zeigt.

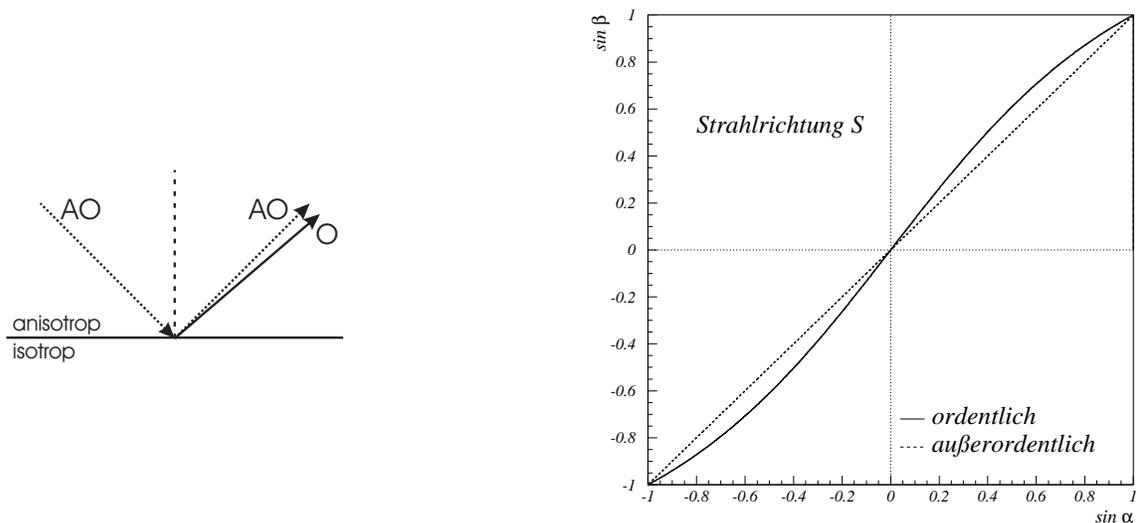


Abbildung 1.17: einfallender Strahl außerordentlich, \vec{OA} parallel zur Grenzfläche: Der ordentliche Strahl wird unter größerem Winkel reflektiert

Wie im ersten Beispiel gilt für den außerordentlichen Strahl: Einfallswinkel = Ausfallswinkel, da einfallender und reflektierter außerordentlicher Strahl immer den gleichen Winkel zur optischen Achse haben, so daß Brechungsindex und Verkippung für beide jeweils gleich stark sind.

Der ordentliche Strahl wird dagegen unter einem größeren Winkel reflektiert, was wieder durch die gegenläufigen Effekte von Brechungsindexunterschied und Verkippung des einfallenden Strahls verursacht wird.

Die „verhinderte Reflexion“ kann hier aus zwei Gründen nicht auftreten:

1. Der einfallende Strahl hat den kleineren Brechungsindex.
2. Für große Einfallswinkel entartet die Doppelbrechung.

3. Optische Achse 45° zur Flächennormalen

Einfallender Strahl: ordentlich

Nach den bisher gezeigten Spezialfällen liegt in diesem Beispiel die optische Achse 45° zur Flächennormalen in der Einfallsebene. Abbildung 1.18 zeigt den Verlauf, falls der einfallende Strahl ordentlich ist.

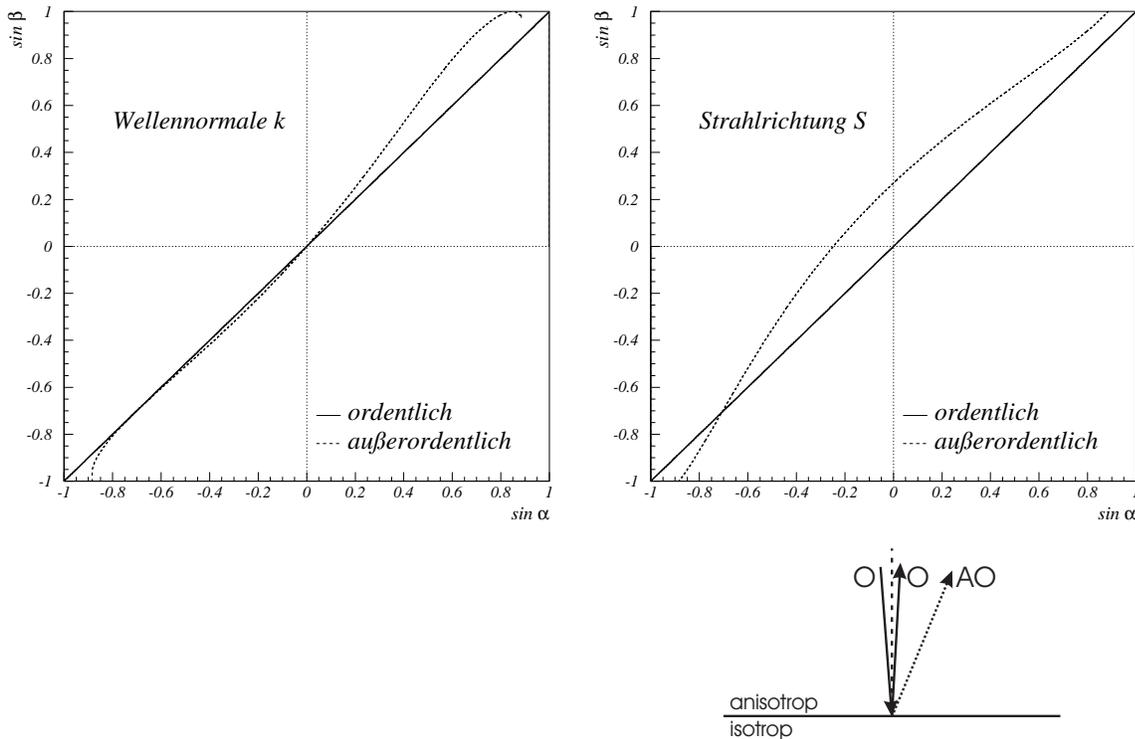


Abbildung 1.18:

einfallender Strahl ordentlich, \vec{OA} 45° zur Flächennormalen: Bei senkrechtem Einfall wird der außerordentliche Strahl nicht senkrecht reflektiert

Für den ordentlich reflektierten Strahl ergibt sich erwartungsgemäß in der \vec{k} wie in der \vec{S} -Darstellung wieder eine Ursprungsgerade mit Steigung 1.

Das Verhalten des außerordentlich reflektierten Strahls ist deutlich komplizierter: Erstmals ist der Verlauf der Kurve – sowohl in der \vec{k} wie in der \vec{S} Darstellung – nicht symmetrisch zum Ursprung, was dazu führt, daß der Strahl selbst bei senkrechtem Auftreffen aufspaltet: Während der ordentliche wieder senkrecht zurückreflektiert wird, wird der außerordentliche bereits unter einem merklichen Winkel reflektiert.

Betrachtet man den Verlauf der Wellennormalen \vec{k} in Abbildung 1.18, so erkennt man bei sehr großen negativen Einfallswinkeln ($\sin(\alpha) = -1 \dots -0.88$) einen Bereich „verhinderter Reflexion“.

Überschreitet $\sin(\alpha)$ die Grenze von -0.88 , so kommt der außerordentlich reflektierte Strahl hinzu. Bei -0.7 ($\alpha = -45^\circ$) sind die reflektierten Strahlen und die optische

Achse parallel, die Doppelbrechung ist entartet und die Kurven berühren sich. Erst bei großen positiven Einfallswinkeln entfernen sie sich wieder deutlich voneinander, bis die Kurve bei $\sin(\alpha) \approx 0.88$ ihr Maximum erreicht ($\sin(\beta) = 1 \Rightarrow \beta = 90^\circ$). Oberhalb dieser Grenze erkennt man im Bereich $\sin(\alpha) = 0.85 \dots 0.88$, daß ein zunehmender Einfallswinkel scheinbar einen abnehmenden Ausfallswinkel bewirkt. Dies ist jedoch nicht so: Der Ausfallswinkel beträgt in diesem Bereich mehr als 90° (vgl. Seite 1.4.1). Dann ist die Steigung der Sinus-Funktion negativ, so daß die Auftragung in $\sin(\beta)$ diesen Eindruck erweckt. Oberhalb eines Einfallswinkels von $\sin(\alpha) = 0.88$ tritt wieder verhinderte Reflexion auf.

Die Kurve des Strahlverlaufs \vec{S} wird zusätzlich durch die Verkipfung zwischen \vec{k} und \vec{S} beeinflusst:

Die optische Achse steht 45° zur Flächennormalen und bewirkt eine Verkipfung des Strahls von der optischen Achse weg. Dadurch gibt es zwei Bereiche, in denen die Verkipfung den Effekt durch die Brechungsindexänderung verstärkt ($\beta = -90^\circ \dots -45^\circ$ und $\beta = 0^\circ \dots +45^\circ$) und zwei Bereiche, in denen sie gegenläufig wirkt ($\beta = -45^\circ \dots 0^\circ$ und $\beta = +45^\circ \dots +90^\circ$). Für Einfallswinkel $\alpha < -45^\circ$ ($\sin(\alpha) < -0.7$) ist der Reflexionswinkel des außerordentlichen Strahls größer als der des ordentlichen, im übrigen Winkelbereich ist es dagegen genau umgekehrt.

Die Bereiche, in denen sich Brechungsindexunterschied und Verkipfung addieren bzw. subtrahieren, sind also im allgemeinen kompliziert, was an dem gänzlich unterschiedlichen Verhalten beider Effekte liegt:

Der Brechungsindexunterschied wirkt sich mit zunehmendem Einfallswinkel stärker aus (ausgehend von 0 bei senkrechtem Einfall). Er hat dabei immer die gleiche Richtung (optisch negativer Kristall: Reflexionswinkel von \vec{k} wird größer), nur seine *Stärke* hängt von der Lage des außerordentlichen Strahls zur optischen Achse ab. Der Effekt wird nur *einmal* (in einem Winkelbereich von 180°) maximal, wenn nämlich der Strahl senkrecht auf der optischen Achse steht (Siehe Seite 16).

Der Verkipfungseffekt hängt ausschließlich vom Winkel θ zwischen Strahl und optischer Achse ab. Er ändert dabei nicht nur seine Stärke, sondern auch sein Vorzeichen. Die Stärke des Effekts wird *zweimal* maximal (in der Nähe von $\theta = \pm 45^\circ$), aber mit unterschiedlichem Vorzeichen (Siehe S. 20).

Einfallender Strahl: außerordentlich

Abbildung 1.19 schließlich zeigt das Reflexionsverhalten für den Fall, daß der einfallende Strahl außerordentlich ist.

Nun gilt das Gesetz $\alpha_{AO} = \beta_{AO}$ nicht mehr. Lediglich im Grenzfall $\alpha_{AO} \rightarrow \pm 90^\circ$ strebt auch der außerordentlich reflektierte Strahl gegen $\pm 90^\circ$. Ein senkrecht auftreffender Strahl wird nicht mehr senkrecht reflektiert, weder im ordentlichen noch im außerordentlichen Fall. Dies liegt daran, daß die Wellenfront des senkrecht auf-

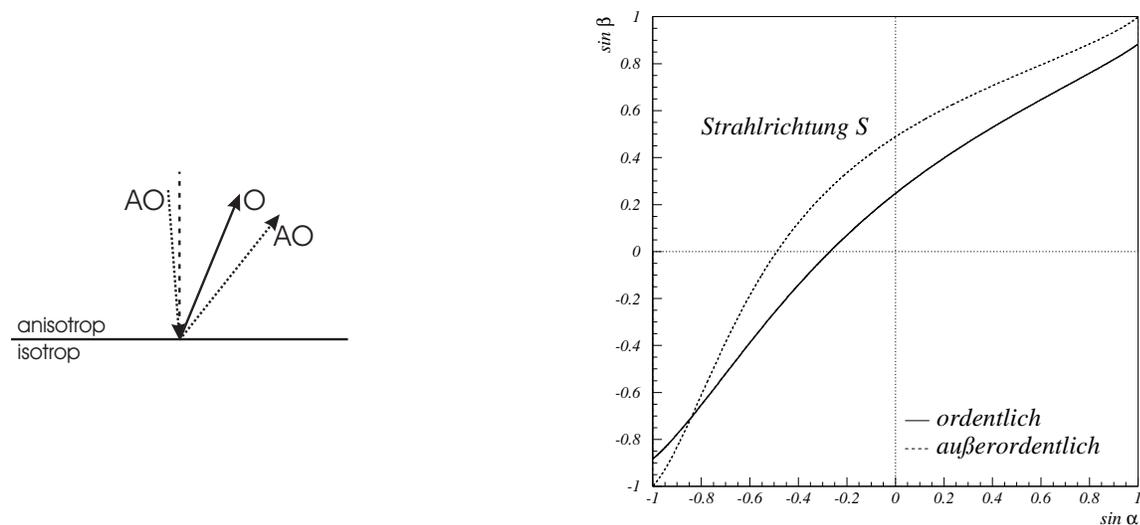


Abbildung 1.19: einfallender Strahl außerordentlich, \vec{OA} 45° zur Grenzfläche: Bei senkrechtem Einfall wird kein Strahl senkrecht reflektiert

treffenden Strahls keineswegs parallel zur Oberfläche steht.

Spätestens jetzt wird klar, warum der außerordentliche Strahl diesen Namen verdient hat.

Liegt die optische Achse nicht in der Einfallsebene, so wird das Problem noch etwas schwieriger, da dann die Strahlen nicht mehr sämtlich in der Einfallsebene bleiben²⁵. Bei der Darstellung muß dann eine Projektion auf diese Ebene verwendet werden. Da ansonsten aber keine neuen Effekte zu beobachten sind, wird hierauf verzichtet.

²⁵Dies gilt nur für die Wellennormalen \vec{k}

1.5 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Nachdem die Richtungen der transmittierten und reflektierten Strahlen nun bekannt sind und eine Aufspaltung – auch bei Reflexion – im anisotropen Medium vom Brechungs- und Reflexionsgesetz zugelassen wird, soll hier untersucht werden, wie sich die Energie des einfallenden Strahls auf die reflektierten und transmittierten Strahlen aufteilt.

Isotroper Fall

Im isotropen Fall ist dies unter dem Stichwort „Fresnel-Formeln“ bekannt:

Dabei muß unterschieden werden, ob das einfallende Licht in der Einfallsebene polarisiert ist („p-Polarisation“) oder senkrecht dazu („s-Polarisation“). Die Lösung dieser beiden Fälle sieht folgendermaßen aus:

$$R_s = \frac{\sin^2(\alpha - \beta_T)}{\sin^2(\alpha + \beta_T)}$$

$$R_p = \frac{\tan^2(\alpha - \beta_T)}{\tan^2(\alpha + \beta_T)}$$

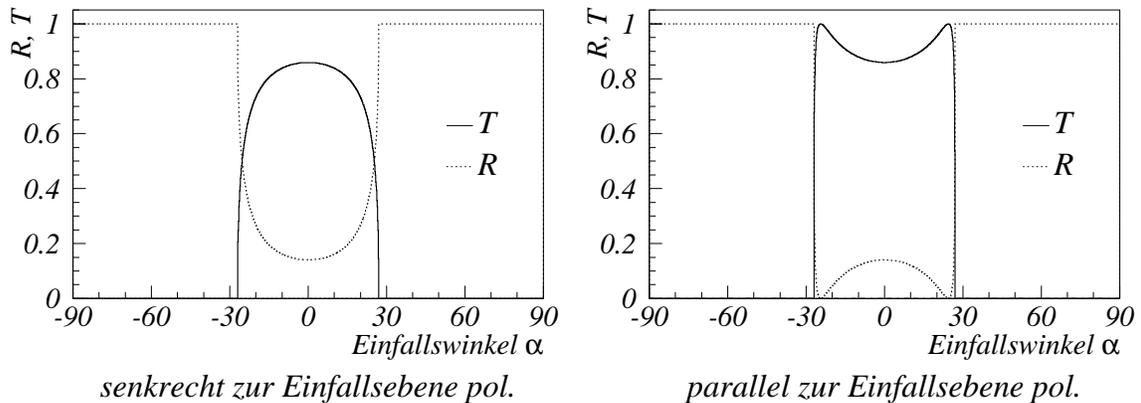


Abbildung 1.20:

Fresnelformeln im isotropen Fall für den Übergang optisch dicht \rightarrow optisch dünn ($n = 2.2 \rightarrow n' = 1$)

Ist der Einfallswinkel gerade $\alpha = \arctan\left(\frac{n'}{n}\right) \approx 24^\circ$, so findet bei p-polarisiertem Licht keine Reflexion statt (Brewster-Winkel).

Anisotroper Fall

Um Reflexions- und Transmissionskoeffizient berechnen zu können, muß die Leistung der einfallenden und auslaufenden Wellen berechnet werden. Der Poynting-Vektor

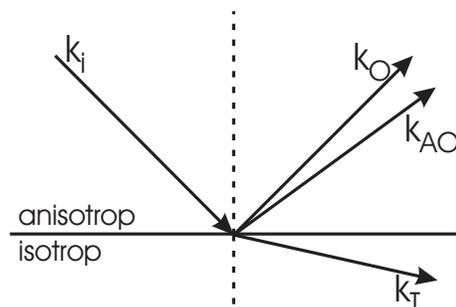


Abbildung 1.21: *Der einfallende Strahl kommt aus dem anisotropen Medium und trifft auf die Grenzfläche zum isotropen Medium. Dabei entstehen ein transmittierter und zwei reflektierte Strahlen*

\vec{S} gibt die Intensität der Welle an, also Leistung pro Fläche. Damit ergibt sich für die Leistung: $P = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$, wobei A eine beliebige Fläche ist, die den ganzen Strahl einschließt. Wählt man die Grenzfläche als Integrationsfläche und ist \vec{S} auf der Fläche konstant, was bei ebenen Wellen gegeben ist, so ist:

$$P = \vec{S} \cdot \vec{N} = (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{N} = \left(\vec{E} \times \frac{1}{\mu_o \omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \right) \cdot \vec{N}$$

Bei Totalreflexion und „verhinderter Reflexion“ wird die Leistung imaginär. Daher wird nur der Realteil berücksichtigt. Damit lassen sich Reflexions- und Transmissionskoeffizient definieren:

$$R = \frac{\text{Re}(P_r)}{P_i} \quad T = \frac{\text{Re}(P_t)}{P_i}$$

Zunächst wird der Fall betrachtet, in dem der einfallende Strahl mit der Wellennormale \vec{k}_i und der Polarisation \vec{E}_i aus dem Innern des anisotropen Mediums kommt und auf die Grenzfläche zum isotropen Medium trifft. Die Wellennormalen der beiden reflektierten Wellen \vec{k}_{AO} und \vec{k}_O lassen sich aus dem Reflexions- und Brechungsgesetz ebenso berechnen wie die Wellennormale der transmittierten Welle \vec{k}_t .

Da das \vec{E} -Feld der einfallenden Welle bekannt ist, läßt sich ihre Leistung P_i berechnen.

Um die Leistungen der drei auslaufenden Wellen berechnen zu können, müssen noch \vec{E}_{AO} , \vec{E}_O und \vec{E}_t bestimmt werden.

Die drei unbekannt Vektoren entsprechen neun Unbekannten, so daß zu deren Lösung neun Gleichungen benötigt werden (Die Rechnung findet nach wie vor in dem Koordinatensystem statt, in dem $\vec{N} = \vec{e}_3 \wedge k_2 = 0$ gilt):

Alle drei Wellen müssen der **Transversalitätsbedingung** genügen:

$$\begin{aligned}\vec{k}_t \cdot \vec{E}_t &= 0 \\ \vec{k}_O \cdot \vec{E}_O &= 0 \\ \vec{k}_{AO} \cdot \underbrace{(\vec{\epsilon} \vec{E}_{AO})}_{\vec{D}_{AO}} &= 0\end{aligned}$$

Für die beiden Wellen im anisotropen Medium gelten die bekannten **Einschränkungen durch die Wellengleichung**:

$$\begin{aligned}\vec{E}_O \cdot \vec{OA} &= 0 \\ \vec{E}_{AO} \cdot \underbrace{(\vec{k}_{AO} \times \vec{OA})}_{\vec{HS}} &= 0\end{aligned}$$

Schließlich folgen aus der Integralschreibweise der Maxwellgleichungen folgende **Stetigkeitsbedingungen**²⁶ für \vec{E}_{\parallel} und \vec{H}_{\parallel} : ($\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{E})$)

$$\begin{aligned}E_{t1} &= E_{i1} + E_{O1} + E_{AO1} \\ E_{t2} &= E_{i2} + E_{O2} + E_{AO2} \\ (\vec{k}_t \times \vec{E}_t)_1 &= (\vec{k}_i \times \vec{E}_i)_1 + (\vec{k}_O \times \vec{E}_O)_1 + (\vec{k}_{AO} \times \vec{E}_{AO})_1 \\ (\vec{k}_t \times \vec{E}_t)_2 &= (\vec{k}_i \times \vec{E}_i)_2 + (\vec{k}_O \times \vec{E}_O)_2 + (\vec{k}_{AO} \times \vec{E}_{AO})_2\end{aligned}$$

Dies sind die neun unabhängigen Gleichungen.

Man erkennt auch jetzt schon, daß es unerheblich ist, von welcher Seite der einfallende Strahl kommt: An den ersten fünf Gleichungen ändert es gar nichts; Bei den letzten vier Stetigkeitsbedingungen würde \vec{E}_i nur auf die andere Seite des Gleichheitszeichens wechseln. Das ist aber äquivalent dazu, \vec{E}_i mit -1 zu multiplizieren, was an der Lösung nichts ändert.

Da alle Gleichungen linear in \vec{E} sind, könnte man das Problem in Matrixform umschreiben und diese diagonalisieren. Die Lösung dieser 9×9 -Matrix ist von Hand wohl kaum fehlerfrei zu bewerkstelligen und auch das mehrseitige Ergebnis des Mathematikprogramms „Maple V“ ist sehr unhandlich.

²⁶ Es gibt auch Stetigkeitsbedingungen für \vec{D}_{\perp} und \vec{B}_{\perp} . Es zeigt sich aber, daß die beiden Gleichungen linear abhängig von H_2 bzw. E_2 sind:

$$\begin{aligned}1.4 \Rightarrow \vec{D} &= -\frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{H}) \Rightarrow D_3 = -\frac{1}{\omega} k_1 H_2 \Rightarrow D_3 \text{ erfüllt, wenn } H_2 \text{ erfüllt.} \\ 1.2 \Rightarrow \vec{B} &= +\frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \Rightarrow B_3 = +\frac{1}{\omega} k_1 E_2 \Rightarrow B_3 \text{ erfüllt, wenn } E_2 \text{ erfüllt.}\end{aligned}$$

Das Problem läßt sich aber sehr gut in Teilprobleme zerlegen, deren Lösungen überschaubarer sind.

Wie in Abschnitt 1.1.3 gezeigt, legen im anisotropen Medium Transversalität und Wellengleichung die Polarisationsrichtung \vec{E}^* von \vec{E} fest. Als einziger Freiheitsgrad bleibt noch die Amplitude A .

$$\vec{E}_O = A_O \cdot \vec{E}_O^* \quad \vec{E}_{AO} = A_{AO} \cdot \vec{E}_{AO}^*$$

Beim ordentlichen Strahl muß \vec{E}_O senkrecht auf \vec{k}_O und der optischen Achse stehen. Damit ergibt sich für die Richtung \vec{E}^* :

$$\vec{E}_O \parallel (\vec{k}_O \times \vec{OA}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_O^* := \frac{\vec{k}_O \times \vec{OA}}{|\vec{k}_O \times \vec{OA}|}$$

Beim außerordentlichen Strahl dagegen muß \vec{D}_{AO} senkrecht auf \vec{k}_{AO} und der Flächennormalen des Hauptschnitts \vec{HS} stehen; Über den inversen Epsilon-Tensor läßt sich daraus die Richtung von \vec{E}_{AO} angeben:

$$\vec{D}_{AO} \parallel (\vec{k}_{AO} \times \underbrace{(\vec{k}_{AO} \times \vec{OA})}_{\vec{HS}}) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{AO}^* := \frac{\vec{\epsilon}^{-1}(\vec{k}_{AO} \times (\vec{k}_{AO} \times \vec{OA}))}{|\vec{\epsilon}^{-1}(\vec{k}_{AO} \times (\vec{k}_{AO} \times \vec{OA}))|}$$

Damit hat sich das Problem von neun auf fünf Unbekannte reduziert: $A_O, A_{AO}, E_{t1}, E_{t2}$ und E_{t3} . Es verbleiben die vier Gleichungen der Stetigkeitsbedingung zu \vec{E}_{\parallel} und \vec{H}_{\parallel} sowie die Transversalität von \vec{E}_t .

Die beiden Komponenten E_{t1} und E_{t2} des transmittierten Strahls lassen sich über die beiden Stetigkeitsbedingung für \vec{E}_{\parallel} bestimmen, die Komponente E_{t3} über die Transversalität:

$$\begin{aligned} E_{t1} &= E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^* \\ E_{t2} &= E_{i2} + A_O E_{O2}^* + A_{AO} E_{AO2}^* \\ \vec{E}_t \cdot \vec{k}_t = 0 &\quad \Rightarrow \quad E_{t3} = -\frac{k_{t1}}{k_{t3}}(E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) \end{aligned}$$

Damit verbleiben noch die beiden unbekanntenen Amplituden A_O und A_{AO} , sowie die Stetigkeitsbedingungen für \vec{H}_{\parallel} .

\vec{H}_t kann jetzt auf zwei Arten berechnet werden:

Es muß sowohl

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\mu_o \omega} (\vec{k}_t \times \vec{E}_t)$$

gelten, als auch

$$\vec{H}_{t1,2} = (\vec{H}_i + \vec{H}_O + \vec{H}_{AO})_{1,2}$$

was aus der Stetigkeitsbedingung für \vec{H}_{\parallel} folgt.

Berechnet man nun \vec{H}_{t1} und \vec{H}_{t2} auf beide Arten, so muß das Ergebnis übereinstimmen. Damit ergeben sich zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\vec{k}_i \times \vec{E}_i)_1 + A_O(\vec{k}_O \times \vec{E}_O^*)_1 + A_{AO}(\vec{k}_{AO} \times \vec{E}_{AO}^*)_1 \\ = -k_{t3}(E_{i2} + A_O E_{O2}^* + A_{AO} E_{AO2}^*) \\ (\vec{k}_i \times \vec{E}_i)_2 + A_O(\vec{k}_O \times \vec{E}_O^*)_2 + A_{AO}(\vec{k}_{AO} \times \vec{E}_{AO}^*)_2 \\ = \left(k_{t3} + \frac{k_{i1}^2}{k_{t3}} \right) (E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) \end{aligned}$$

Durch Lösen dieser beiden Gleichungen²⁷ erhält man die gesuchten Amplituden A_O und A_{AO} . Löst man z.B. nach A_{AO} auf, so erhält man:

$$\begin{aligned} A_{AO} = & \frac{[E_{O2}^*(-k_{t3} + k_{O3})] \cdot [E_{i1}(k_{i3}k_{t3} - \vec{k}_t^2) - E_{i3}k_1k_{t3}] - \dots}{[E_{O1}^*(-k_{O3}k_{t3} + \vec{k}_t^2) + E_{O3}^*k_1k_{t3}] \cdot [E_{AO2}^*(k_{t3} - k_{AO3})] - \dots} \\ & \dots \frac{[E_{O1}^*(-k_{O3}k_{t3} + \vec{k}_t^2) + E_{O3}^*k_1k_{t3}] \cdot [E_{i2}(k_{t3} - k_{i3})]}{[E_{O2}^*(-k_{t3} + k_{O3})] \cdot [(E_{AO1}^*(k_{AO3}k_{t3} - \vec{k}_t^2) - E_{AO3}^*k_1k_{t3})]} \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis wieder in die Gleichung ein, so ergibt sich noch²⁸:

$$A_O = \frac{A_{AO} E_{AO2}^*(k_{t3} - k_{AO3}) + E_{i2}(k_{t3} - k_{i3})}{E_{O2}^*(-k_{t3} + k_{O3})}$$

Damit sind die drei \vec{E} -Felder bestimmt, so daß die Leistungen – und somit die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten – berechnet werden können.

Bei der Lösung ist zu beachten, daß sowohl die \vec{k} - als auch die \vec{E} -Vektoren komplexe Werte annehmen können. Dies tritt für alle \vec{E} -Felder ein, sobald auch nur einer der \vec{k} -Vektoren komplex wird und entspricht einer Phasenverschiebung, wie sie auch im isotropen Fall bei Totalreflexion auftritt. Obwohl für Reflexions- und Transmissionskoeffizienten nur der Realteil der Leistung von Interesse ist, müssen alle vorherigen Zwischenrechnungen mit komplexen Werten durchgeführt werden.

²⁷Rechnung in Anhang A.8

²⁸Es gibt zwei Gleichungen für A_O . Ist $E_{O2}^* = 0$, kann Gleichung A.2 verwendet werden, die in Anhang A.8 zu finden ist.

1.5.1 Darstellung der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Das Reflexions- und Brechungsgesetz liefert zwar (in den meisten Fällen) zwei Lösungen für den ordentlichen bzw. den außerordentlichen Strahl. Eine Strahlaufspaltung wird jedoch nur dann sichtbar, falls die Energie der Welle auch auf beide Lösungen aufgeteilt wird und nicht ausschließlich in die ordentliche oder außerordentliche Lösung fließt. Im folgenden wird gezeigt, wie sich die Energie auf die einzelnen Strahlen aufteilt.

Zunächst wird der Fall betrachtet, bei dem die optische Achse 45° zur Flächennormalen geneigt ist und in der Einfallsebene liegt. Die Koeffizienten sehen dann wie in Abbildung 1.22 aus.

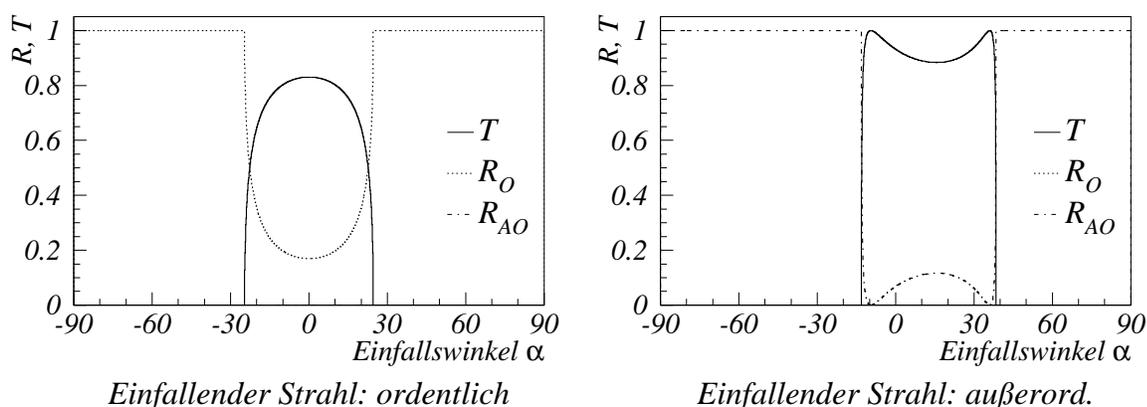


Abbildung 1.22:

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, \vec{OA} 45° zur Oberfläche geneigt in der Einfallsebene

Offenbar wird ein einfallender ordentlicher Strahl ausschließlich ordentlich reflektiert, genau wie ein einfallender außerordentlicher Strahl nur außerordentlich reflektiert wird.

Vergleicht man sie mit den Bildern der isotropen Fresnel-Formel auf Seite 38, so sehen sie sich – von einer Asymmetrie beim außerordentlichen Strahl abgesehen – zum verwechseln ähnlich. Der ordentliche Strahl entspricht dabei dem s-polarisierten, der außerordentliche dem p-polarisierten.

Betrachtet man den Hauptschnitt, so ist dies nicht weiter erstaunlich: Er wird von \vec{k} und optischer Achse aufgespannt. Da letzterer in der Einfallsebene liegt, sind Hauptschnitt und Einfallsebene identisch. Da der außerordentliche Strahl im Hauptschnitt schwingt, schwingt er auch in der Einfallsebene, wie der p-polarisierte im isotropen Fall. Für den ordentlichen Strahl ergibt sich entsprechend die Äquivalenz zur

s-Polarisation.

Die Asymmetrie beim außerordentlich einfallenden Strahl zeigt bereits, daß die Lösung nicht rotationssymmetrisch um die Flächennormale ist²⁹.

Wie sieht die Lösung aus, falls die optische Achse nicht in der Einfallsebene liegt? Abbildung 1.23 zeigt die Lösung für den Fall, daß die optische Achse 35° aus der Einfallsebene herausgedreht ist.

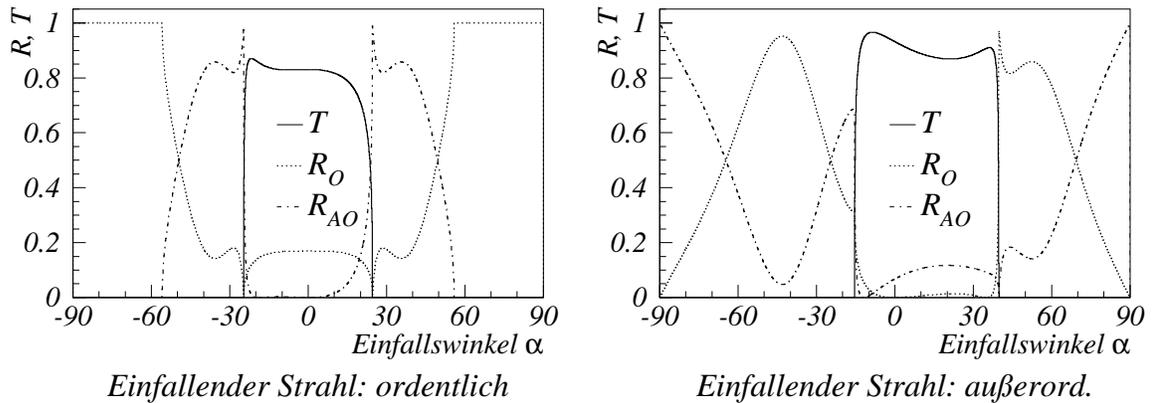


Abbildung 1.23:

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, \vec{OA} außerhalb der Einfallsebene

Offenbar spalten die reflektierten Strahlen in beiden Fällen auf. Lediglich bei einem ordentlich einfallenden Strahl und großem Einfallswinkel tritt „verhinderte Reflexion“ auf, die eine Aufspaltung unmöglich macht.

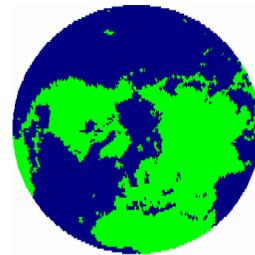
Abbildung der Einfallshalbkugel

Um eine komplette Übersicht zu erhalten, wie sich die Leistung der einfallenden Welle bei einer bestimmten Lage der optischen Achse auf die drei auslaufenden Wellen aufteilt, müßte man eine ganze Serie dieser Fresnel-Bilder machen, die zumindest grob alle möglichen Punkte der Einfallshalbkugel erfassen.

Besser wäre eine Methode, die das Verhalten in der ganzen Einfallshalbkugel in *einer* Abbildung wiedergibt.

²⁹ Im isotropen Fall genügen zur vollständigen Darstellung der Fresnel-Formeln zwei Graphen mit den unterschiedlichen Polarisationsrichtungen, da das Problem rotationssymmetrisch um die Flächennormale ist und alle anderen Einfallsebenen identische Ergebnisse liefern.

Diese Aufgabe wird folgendermaßen gelöst: Die Einfallshalbkugel wird auf einen Kreis projiziert, wie dies z.B. auch bei der Projektion der nördlichen Erdhalbkugel auf eine Karte geschieht. Dazu wurde eine flächentreue Projektion³⁰ benutzt, so daß die Größe der Fläche in der Projektion proportional der Größe des Raumwinkels in der Einfallshalbkugel ist.



Somit entspricht jeder Punkt auf dem Kreis einem Strahl aus der Einfallshalbkugel. Diesem Punkt ordnet man dann folgendermaßen eine Farbe zu: Der Reflexionskoeffizient des außerordentlichen Strahls entspricht dem Rotanteil des Punkts, der Reflexionskoeffizient des ordentlichen Strahls entspricht dem Grünanteil und der Transmissionskoeffizient entspricht dem Blauanteil. Wird der einfallende Strahl nun z.B. ausschließlich ordentlich reflektiert, so wird diesem Punkt die Farbe grün zugeordnet. Spaltet der Strahl in mehrere Anteile auf, entsteht die entsprechende Mischfarbe.

Während also die Koordinate auf dem Kreis durch die Richtung des *einfallenden* Strahls bestimmt wird, ergibt sich die Farbe dieser Koordinate durch die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten der drei *auslaufenden* Strahlen.

Die „klassische“ Abbildung einer Einfallsebene entspricht dann einem Querschnitt durch diesen Kreis.

Wie beim Reflexions- und Brechungsgesetz werden im folgenden drei Beispiele mit unterschiedlichen Lagen der optischen Achse vorgestellt. Dabei werden wieder jeweils die beiden Fälle gezeigt, in denen der einfallende Strahl ordentlich bzw. außerordentlich ist.

Optische Achse 45° zur Flächennormalen Einfallender Strahl: ordentlich

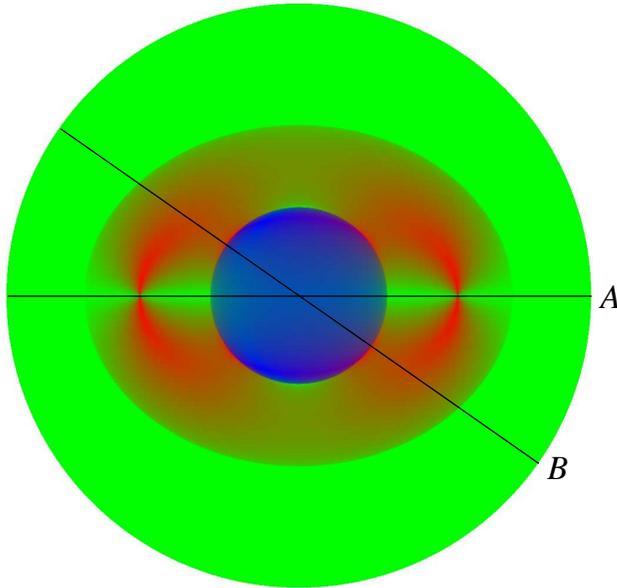
Wir bleiben zunächst bei dem Fall, bei dem optische Achse und Flächennormale einen Winkel von 45° zueinander bilden. Abbildung 1.24 zeigt, wie sich die Energie des einfallenden ordentlichen Strahls auf die drei auslaufenden Strahlen aufteilt. Neben der Projektion der Einfallshalbkugel ist nochmals der Verlauf in den beiden vorher gewählte Einfallsebenen gezeigt.

Man erkennt folgende Dinge:

- Der blaue Kreis in der Mitte ist der Bereich, in dem einfallendes Licht überwiegend transmittiert wird.

³⁰Anhang A.9

Projektion der Einfallshalbkugel:



Schnitte durch Einfallshalbkugel:

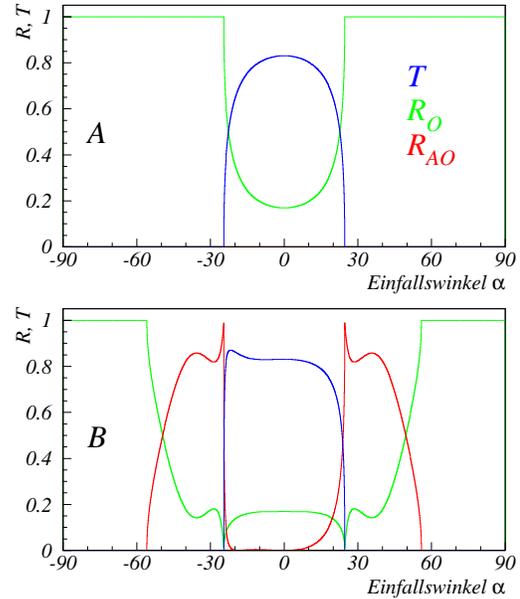


Abbildung 1.24:

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, \vec{OA} 45° zur Flächennormalen. Einfallender Strahl: ordentlich

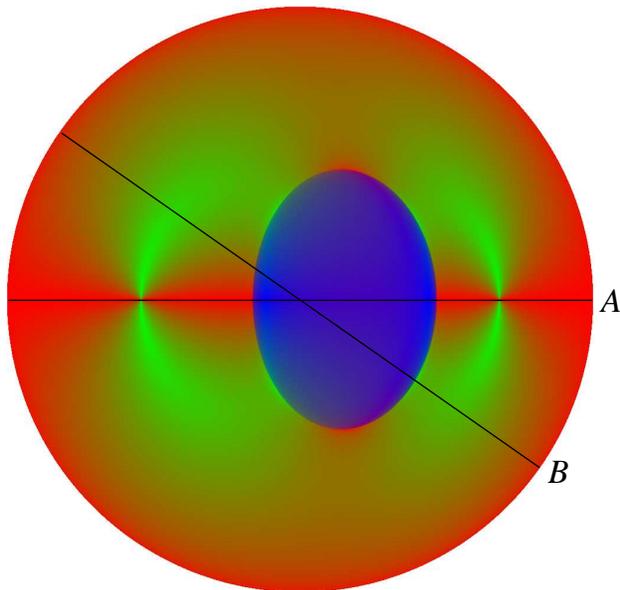
- Da die Polarisationsrichtung des einfallenden ordentlichen Strahls von optischer Achse und Einfallsrichtung abhängt, ist die Transmission nicht rotationsymmetrisch (gut am zweiten Schnitt zu erkennen): Der Anteil des elektrischen Feldes, der parallel bzw. senkrecht zur Einfallsebene schwingt, ist unterschiedlich. Daher ist hier z.B. in der linken Hälfte ansatzweise ein Brewsterwinkel vorhanden (Maximum bei der Transmission), während sich die Transmission in der rechten Hälfte eher wie bei s-Polarisation verhält.
- Der Bereich, in dem Transmission stattfinden kann, ist von einem weiten, ellipsenförmigen Winkelbereich umgeben, in dem der Strahl aufspaltet.
- Die zwei roten „Zangen“ laufen spitz auf die Punkte zu, an denen der einfallende bzw. die auslaufenden Strahlen parallel zur optischen Achse verlaufen. Hier bewirkt schon eine kleine Änderung der Einfalls- bzw. Ausfallsrichtung eine starke Änderung des Hauptschnitts.
- Um diesen Winkelbereich schließt sich der Bereich großer Einfallswinkel an. Die „verhinderte Reflexion“ bewirkt, daß der Strahl vollständig ordentlich reflektiert wird. Die Ellipsenform kommt durch den richtungsabhängigen Brechungsindex des außerordentlichen Strahls zustande.

- Der Schnitt, bei dem die optische Achse in der Einfallsebene liegt, ist der einzige mögliche Schnitt, bei dem der Strahl nie aufspaltet.

Optische Achse 45° zur Flächennormalen Einfallender Strahl: außerordentlich

Ist der einfallende Strahl außerordentlich, so sehen die entsprechenden Bilder etwas komplizierter aus. Abbildung 1.25 zeigt die Projektion der Einfallshalbkugel und die beiden ausgewählten Schnitte.

Projektion der Einfallshalbkugel:



Schnitte durch Einfallshalbkugel:

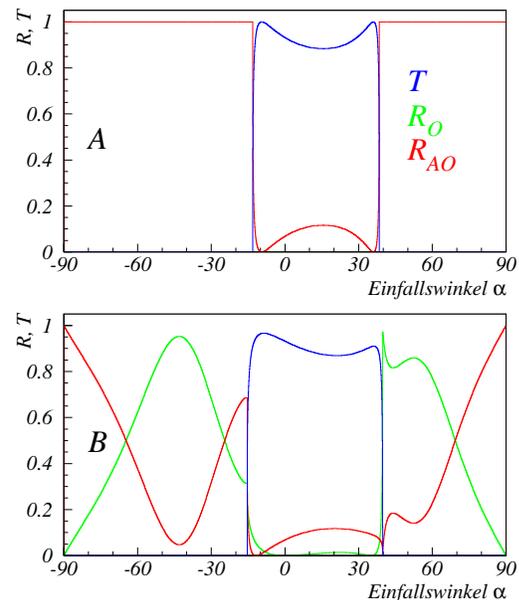


Abbildung 1.25:

Reflexions- und Transmissionskoeffizienten, \vec{OA} 45° zur Flächennormalen. Einfallender Strahl: außerordentlich

Es gibt einige Unterschiede zum vorigen Beispiel:

- Der Bereich der Transmission ist nicht rund, sondern oval. Dies liegt am richtungsabhängigen Brechungsindex n_{AO} des einfallenden außerordentlichen Strahls, der unterschiedliche Grenzwinkel der Totalreflexion verursacht.
- Das „Transmissionsoval“ liegt nicht in der Mitte: Dies liegt an der Verkippung zwischen \vec{k} und \vec{S} .
- Es gibt keine „verhinderte Transmission“, da der einfallende Strahl außerordentlich ist und $n_{AO} \leq n_O$ gilt.

Bei den nun folgenden Beispielen wird nur noch die Projektion der Einfallshalbkugel gezeigt:

optische Achse parallel zur Oberfläche

Liegt die optische Achse parallel zur Oberfläche, so sehen die beiden Projektionen den gerade besprochenen recht ähnlich (Abbildung 1.26).

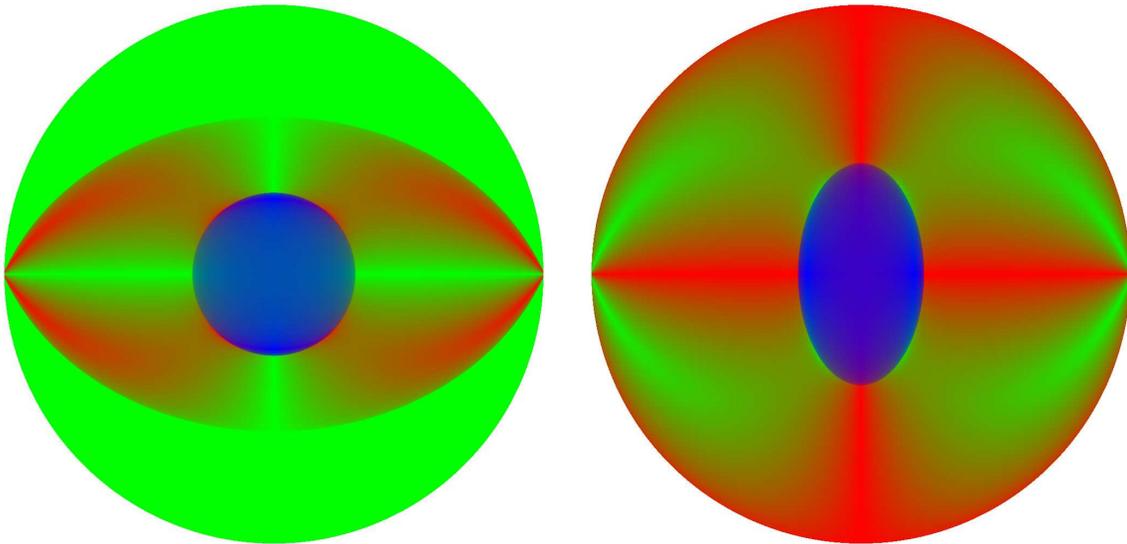


Abbildung 1.26: *Strahlaufspaltung, optische Achse parallel zur Oberfläche einfallender Strahl ordentlich (links) bzw. außerordentlich (rechts). (Grün = R_O , Rot = R_{AO} , Blau = T)*

Unterschiede finden sich in folgenden Punkten:

- Es gibt einen zweiten Schnitt, bei dem die Strahlen nicht aufspalten: Die Einfallsebene steht senkrecht zur optischen Achse.
- Der Bereich der Strahlaufspaltung bei ordentlich einfallendem Strahl ist größer geworden und reicht nun bis zu streifendem Einfall, falls der einfallende Strahl ungefähr die selbe Richtung wie die optische Achse hat.

optische Achse senkrecht auf der Oberfläche

Zuletzt soll untersucht werden, wie sich die Strahlen verhalten, falls die optische Achse senkrecht auf der Oberfläche steht (Abbildung 1.27).

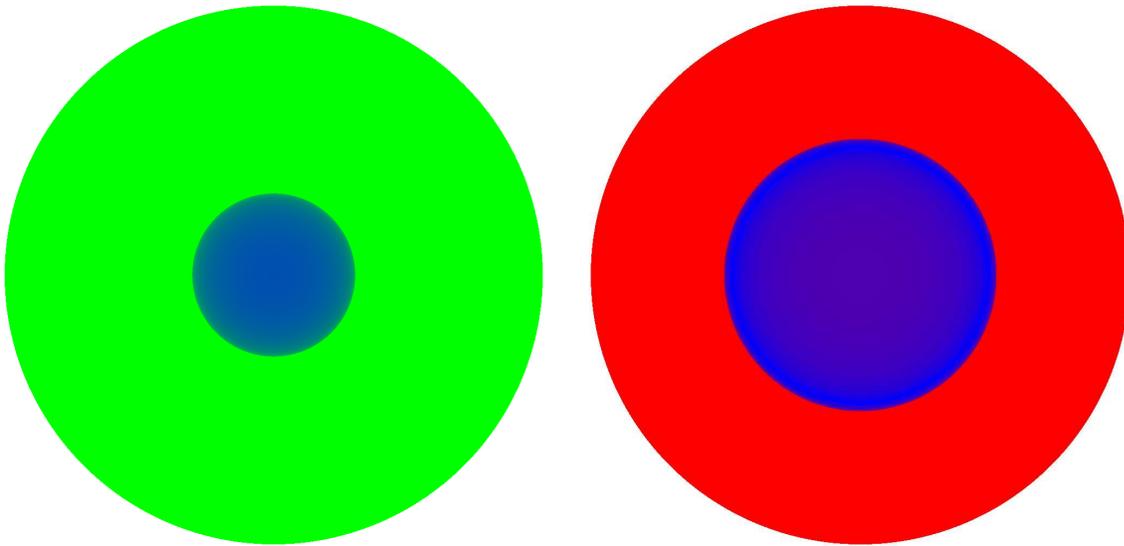


Abbildung 1.27: *Strahlaufspaltung, optische Achse senkrecht auf Oberfläche, einfallender Strahl ordentlich (links) bzw. außerordentlich (rechts) (Grün = R_O , Rot = R_{AO} , Blau = T)*

Offenbar findet für keine Einfallrichtung eine Aufspaltung der reflektierten Strahlen statt. Obwohl das Brechungs- und Reflexionsgesetz eine Aufspaltung des reflektierten Strahls zuläßt, fließt die Energie immer nur vollständig in eine der beiden Lösungen.

Ist der einfallende Strahl außerordentlich, so erkennt man den Brewster- Winkel als hellblauen Ring am äußeren Rand des blauen Flecks.

Strahlaufspaltung bei Reflexion

Die Polarisationsrichtung einer Welle in bezug auf die Einfallsebene bleibt bei Reflexion und Transmission erhalten: Ist die einfallende Welle z.B. p-polarisiert, so wird dies auch für die reflektierte Welle gelten.

Im anisotropen Medium kann die Polarisationsrichtung aber nicht frei gewählt werden. Daher wird der Strahl nur dann nicht aufspalten, falls die Einfallsebene und der Hauptschnitt des einfallenden Strahls, der die Polarisation festlegt, den gleichen Winkel zueinander besitzen, wie die Einfallsebene und der Hauptschnitt der auslaufenden Welle.

In allen anderen Fällen wird sich die Energie der Einfallenden Welle so auf ordentlich und außerordentlich auslaufende Welle aufteilen, daß die Überlagerung ihrer beiden \vec{E} -Felder die gleiche Polarisation in bezug auf die Einfallseben besitzt, wie die der einfallenden Welle.

Kapitel 2

Lichtsammlung

Beim elektromagnetischen Kalorimeter (ECAL) des CMS-Detektors wird die Energie von Photonen, Elektronen und Positronen dadurch bestimmt, daß sie beim Durchgang durch den PbWO_4 -Kristall (nahezu) vollständig absorbiert werden und dabei Szintillationslicht erzeugen, dessen Photonenzahl ihrer Energie proportional ist.

Prinzipiell ist nur ein Teil des entstehenden Szintillationslichts nachweisbar. Die Lichtsammlung beschäftigt sich mit der Frage, welcher Prozentsatz des Lichts nachweisbar ist. Die Energieauflösung des Kalorimeters hängt unter anderem von der Gesamtlichtausbeute $\bar{\eta}$ und der Uniformität $\eta(z_E)$ (Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Emissionsort auf der Längsachse z) ab [14].

In den folgenden Abschnitten werden einige Effekte erklärt, die diese beiden Parameter beeinflussen.

- Ein fundamentaler Effekt wird durch das **Brechungsgesetz** hervorgerufen: Da das Licht von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium gelangen muß, tritt für große Auftreffwinkel Totalreflexion auf, die das Licht am Verlassen des Kristalls hindert. Somit spielen die Brechungsindizes des Kristalls, des Photodetektors und des optischen Kitts, der die beiden miteinander verbindet, eine entscheidende Rolle. Bei anisotropen Kristallen sind die Auswirkungen der **Doppelbrechung** von besonderem Interesse.
- Auf dem Weg durch den Kristall und den optischen Kitt wird stets Licht absorbiert. Die Beschreibung der **Absorption** geschieht dabei über die Absorptionslänge Λ_A : Legt der Strahl den Weg l zurück, so nimmt seine Intensität um den Faktor e^{-l/Λ_A} ab.
- Durch Kristallfehler, Verunreinigungen und eine nicht perfekte Oberfläche treten **Streuungen** auf. Dabei wird davon ausgegangen, daß der Strahl bei einer

Streuung isotrop in den Raum gestreut wird, unabhängig von seiner ursprünglichen Richtung. Die Streuung im Kristallvolumen wird, analog zur Absorption, durch die Streulänge Λ_S beschrieben: Legt der Strahl den Weg l zurück, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er hierbei gestreut wird, e^{-l/Λ_S} . Für die Streuung an der Kristalloberfläche wird direkt die Wahrscheinlichkeit angegeben, mit der der Strahl beim Auftreffen auf die Oberfläche gestreut wird.

- Die Kristalle im ECAL sind nicht quaderförmig, sondern haben die Form eines **Pyramidenstumpfes**. Dadurch kommt es zum „Fokussierungseffekt“, der Lichtausbeute und Uniformität beeinflusst.
- Durch **Verpackung** des Kristalls mit gut reflektierendem Material läßt sich Licht, das den Kristall verläßt, zurückreflektieren, so daß die Lichtausbeute steigt.
- Die Größe des Photodetektors im Verhältnis zur Rückfläche des Kristalls wird als **Bedeckungsfaktor** bezeichnet. Die Lichtausbeute hängt vom Bedeckungsfaktor ab.
- Eine **Antireflexbeschichtung** des Photodetektors kann die Lichtausbeute erhöhen.

Im folgenden werden die Auswirkungen der genannten Effekte auf die Lichtsammlung anhand eines Beispielkristalls beschrieben.

2.1 Brechungsgesetz und Totalreflexion

Die Länge des Beispielkristalls beträgt 200mm, die beiden Stirnflächen haben eine Kantenlänge von 20mm. Der Kristall sei optisch isotrop und habe einen Brechungsindex von $n_{Kr} = 2.2$. Die Front- und die vier Mantelflächen sind von Luft ($n_L = 1$) umgeben, während die Rückfläche vollständig mit optischem Kitt ($n_{Kitt} = 1.5$) bedeckt ist, an den sich der Photodetektor (PD) mit gleichem Brechungsindex ($n_{PD} = n_{Kitt} = 1.5$) anschließt (Abbildung 2.1).

Am Beispiel dieses optisch isotropen Szintillationskristalls, der das Licht weder absorbiert noch streut, soll gezeigt werden, wie sich das Brechungs- und Reflexionsgesetz auf die Lichtsammlung auswirkt.

Damit das Szintillationslicht den Kristall verlassen kann, muß es von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium gelangen. Bei diesem Übergang tritt nach dem Brechungsgesetz für große Einfallswinkel Totalreflexion auf. Es sind hier zwei

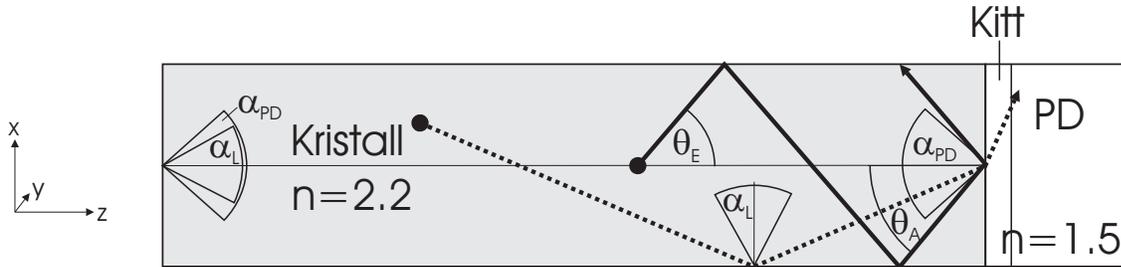


Abbildung 2.1: *Strahlen mit $\theta_A < \alpha_{PD}$ können nachgewiesen werden.*

Fälle zu unterscheiden: Beim Übergang in die umgebende Luft beträgt der Grenzwinkel der Totalreflexion $\alpha_L = \pm \arcsin\left(\frac{n_L}{n_{Kr}}\right) = \pm 27^\circ$, während er beim Übergang zum Photodetektor $\alpha_{PD} = \pm \arcsin\left(\frac{n_{Kitt}}{n_{Kr}}\right) = \pm 43^\circ$ beträgt.

Somit hängt die Nachweiswahrscheinlichkeit stark vom Einfallswinkel θ_A auf der Rückfläche des Kristalls (also am Übergang zum Detektor) ab. Überschreitet θ_A den Winkel α_{PD} , so wird dieses Licht vollständig reflektiert und ist nicht detektierbar; Unterschreitet θ_A dagegen diesen Winkel, so wird nach den Fresnelformeln ein Teil des Lichts transmittiert und ein Teil reflektiert, so daß dieses Licht prinzipiell detektierbar ist.

Findet zwischen Emission und Auftreffen auf die Rückfläche keine Reflexion statt, so ist der Emissionswinkel θ_E gleich dem Auftreffwinkel θ_A an der Kristallrückfläche. Aber auch eine Reflexion an einer der vier Mantelflächen ändert nur das Vorzeichen von θ , was für die Detektierbarkeit aber irrelevant ist. Wird das Licht an der Mantelfläche zudem totalreflektiert, ändert sich auch die Nachweiswahrscheinlichkeit nicht, da keine Verluste durch Transmission entstehen.

Damit hängt die Nachweiswahrscheinlichkeit stark vom Emissionswinkel θ_E des Szintillationslichts ab:

Um einen Überblick zu erhalten, wie die Nachweiswahrscheinlichkeit vom Emissionswinkel θ_E abhängt, wird in Abbildung 2.2 die Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ aufgetragen. Die Auftragung gegen den Kosinus geschieht, weil das Raumwinkelement $d\Omega = d(\cos\theta)d\varphi$ proportional zu $\cos(\theta)$ ist. Der Anteil des detektierten Lichtes entspricht dadurch der Fläche unter dem Graphen.

Dieser Graph wurde – wie auch alle folgenden Ergebnisse dieses Kapitels – mit einem Simulationsprogramm berechnet. Um in endlicher Zeit Ergebnisse zu erhalten, muß die Absorptionslänge ebenfalls endlich sein (in diesem Beispiel ist $\Lambda_A = 10m$). Dadurch liegt η etwas unter den theoretischen Werten.

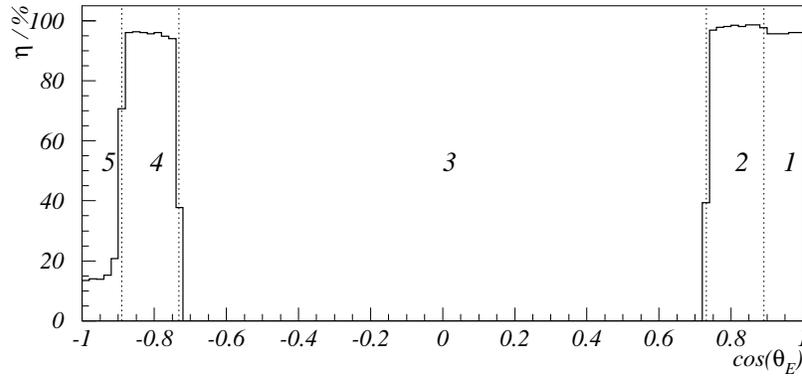


Abbildung 2.2: Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ in einem isotropen Quader.

In Abbildung 2.2 können fünf Winkelbereiche unterschieden werden:

1. $|\theta_E| = 0 \dots \alpha_L = 0^\circ \dots 27^\circ \Leftrightarrow \cos(\theta_E) = 0.89 \dots 1$:
Das Licht trifft steil auf die Grenzfläche zum Detektor und kann dadurch zum Großteil detektiert werden.
Der kleinere reflektierte Anteil ($R \approx \left(\frac{n_{Kr} - n_{PD}}{n_{Kr} + n_{PD}}\right)^2 = 3.5\%$) läuft in Richtung Frontfläche und trifft dort mit einem Einfallswinkel kleiner α_L auf. Durch diesen steilen Einfallswinkel wird er größtenteils transmittiert und geht somit verloren. Daher liegt die Nachweiswahrscheinlichkeit ungefähr bei $100\% - R = 96.5\%$.
2. $|\theta_E| = \alpha_L \dots \alpha_{PD} = 27^\circ \dots 43^\circ \Leftrightarrow \cos(\theta_E) = 0.73 \dots 0.89$:
Das Licht trifft noch steil genug auf die Grenzfläche zum Detektor, um zum Großteil detektiert zu werden.
Der reflektierte Anteil läuft wieder in Richtung Frontfläche, auf die er mit einem Einfallswinkel größer α_L auftrifft, so daß er totalreflektiert wird und wieder in Richtung Detektor läuft. Dies wiederholt sich so lange, bis das Licht vollständig detektiert ist. Damit liegt die Nachweiswahrscheinlichkeit bei 100% .
3. $|\theta_E| = \alpha_{PD} \dots 180^\circ - \alpha_{PD} = 43^\circ \dots 137^\circ \Leftrightarrow \cos(\theta_E) = -0.73 \dots 0.73$:
Das Licht trifft zu flach auf die Grenzfläche zum Detektor, um transmittiert werden zu können (Totalreflexion). Daran können auch beliebig viele Reflexionen an den anderen Flächen nichts ändern, so daß die Nachweiswahrscheinlichkeit bei 0% liegt.¹

¹ Das Licht wird entweder an allen sechs Flächen totalreflektiert, so daß es den Kristall nicht

4. $|\theta_E| = 180^\circ - \alpha_{PD} \dots 180^\circ - \alpha_L = 137^\circ \dots 153^\circ \Leftrightarrow$
 $\cos(\theta_E) = -0.89 \dots -0.73:$

Dieser Fall entspricht dem zweiten Fall, nur läuft das Licht hier zunächst in Richtung Frontfläche, wo es aber totalreflektiert wird. Früher oder später wird es in den Detektor transmittiert werden, so daß die Nachweiswahrscheinlichkeit 100% beträgt.

5. $|\theta_E| = 180^\circ - \alpha_L \dots 180^\circ = 153^\circ \dots 180^\circ \Leftrightarrow \cos(\theta_E) = -1 \dots -0.89:$

Das Licht trifft zunächst so steil auf die Frontfläche (Einfallswinkel $< \alpha_L$), daß ein Großteil transmittiert wird und damit verloren ist. Der reflektierte Restanteil wird weitgehend detektiert. Die Nachweiswahrscheinlichkeit ist niedrig und kann über den Reflexionskoeffizienten an der Frontfläche $R = \left(\frac{n_{Kr} - n_L}{n_{Kr} + n_L}\right)^2 = 14\%$ abgeschätzt werden.

Eventuelle Reflexionen an den Mantelflächen haben keinen Einfluß: Um an der Mantelfläche nicht totalreflektiert zu werden, muß θ den Grenzwinkel $90^\circ - \alpha_L$ überschreiten. Um aber auch detektierbar zu sein, muß θ den Winkel α_{PD} unterschreiten. Totalreflexion an den Mantelflächen liegt für detektierbares Licht also immer vor, falls $\alpha_{PD} + \alpha_L < 90^\circ$ gilt. Dies läßt sich auch einfacher über die Brechungsindizes formulieren: $n_{PD}^2 < n_{Kr}^2 - 1$. In diesem Beispiel ist die Totalreflexion an den Mantelflächen also gewährleistet².

Sämtliche Effekte sind aber unabhängig davon, an welchem Ort im Kristall das Licht entsteht. Daher ist die Nachweiswahrscheinlichkeit unabhängig von der Position der Emission, insbesondere auch unabhängig von z_E . Abbildung 2.3 zeigt diese perfekte Uniformität.

2.2 Absorption

Jeder reale Kristall hat ein endliche Absorptionslänge Λ_A . Dadurch wird Licht, das näher am Detektor entsteht und in dessen Richtung emittiert wird, weniger stark absorbiert als Licht, das näher an der Frontfläche entsteht und einen weiteren Weg durch den Kristall zurücklegen muß. Daher sinkt die Nachweiswahrscheinlichkeit mit zunehmendem Abstand vom Detektor. Abbildung 2.4 zeigt den Effekt für verschiedene Absorptionslängen Λ_A .

Auch bei der Emissionswinkelaufragung erkennt man, daß Licht, das zur Front hin ausgesandt wird ($\cos(\theta_E) < 0$) und erst nach einer Reflexion an der Frontfläche

verlassen kann, oder wird an einer der vier Mantelflächen transmittiert, falls der Einfallswinkel dort weniger als $\alpha_L = 27^\circ$ beträgt.

² $1.5^2 < 2.2^2 - 1 \Leftrightarrow 2.25 < 4.84 - 1$

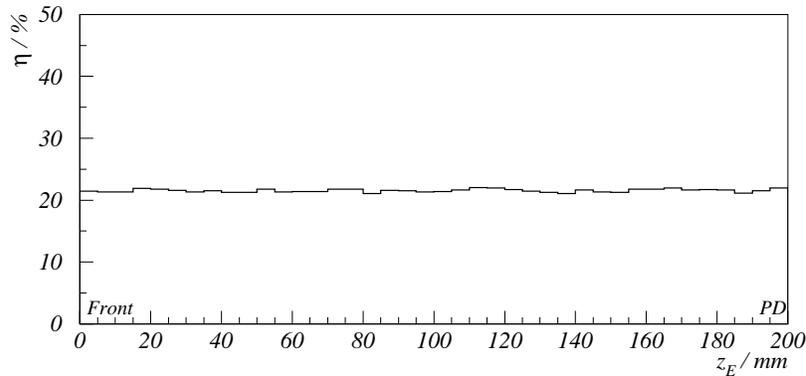


Abbildung 2.3: *Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Emissionsort z_E in einem isotropen Quader.*

wieder in Richtung Detektor läuft, stärker von der Absorption betroffen ist als das direkt in Richtung Detektor emittierte ($\cos(\theta_E) > 0$).

2.3 Streuung

Die Auswirkung der Streuung auf die Lichtsammlung hängt sehr von der Absorptionslänge ab: Ist die Absorptionslänge Λ_A kleiner als die Streulänge Λ_S , so wird Licht im Mittel schon vor einer möglichen Streuung absorbiert, so daß der Einfluß der Streuung klein wird. Daher gilt das im folgenden gesagte immer nur unter der Voraussetzung, daß die Absorptionslänge größer als die Streulänge ist.

Ausgehend von einem isotropen Quader ohne Absorption ($\Lambda_A = \infty$) wird zunächst eine schwache Streuung (Streulänge \gg Kristalllänge) angenommen. Je nach Emissionwinkel ist das Szintillationslicht unterschiedlich stark von der Streuung betroffen (Abbildung 2.5, $\Lambda_S = 2000\text{mm}$):

1. Licht, das im – auch ohne Streuung – detektierbaren Winkelbereich emittiert wird, ist kaum betroffen, da es im Mittel nur Weglängen in der Größenordnung der Kristalllänge bis zur Detektion zurücklegen muß. (Licht aus Bereich 1 in Abbildung 2.5)
2. Licht, das an allen sechs Flächen totalreflektiert wird, läuft solange durch den Kristall, bis es gestreut wird. Durch die Streuung kann es in einen Winkelbereich gelangen, der detektierbar ist. Die Nachweiswahrscheinlichkeit für dieses Licht ist dann so hoch wie die über alle Winkel gemittelte Nachweiswah-

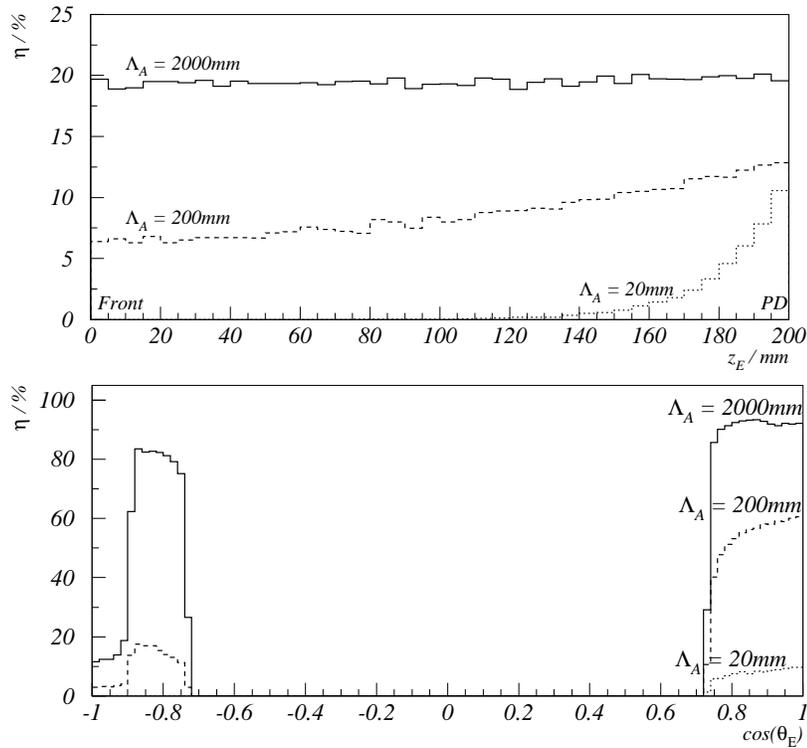


Abbildung 2.4: *Nachweiswahrscheinlichkeit im isotropen, absorbierenden Quader der Länge 200mm für verschiedene Absorptionslängen Λ_A .*

scheinlichkeit. (Licht aus Bereich 2 und ein Teil³ des Lichts aus Bereich 3 in Abbildung 2.5)

3. Licht, das den Kristall über die Mantelflächen verlassen kann, ist ebenfalls kaum von der Streuung betroffen, da es vor einer Streuung den Kristall größtenteils verlassen hat ($\Lambda_S \gg$ Kristalllänge). (Ein Teil des Lichts aus Bereich 3 in Abbildung 2.5)

In diesem Bereich der schwachen Streuung ist die Nachweiswahrscheinlichkeit somit praktisch nur vom Emissionswinkel θ_E abhängig; Der Emissionsort z_E ist dagegen irrelevant. Damit steigt bei schwacher Streuung die Gesamtnachweiswahrscheinlichkeit an ($\Lambda_A = \infty$, $\Lambda_S = \infty$: $\bar{\eta} = 22\%$, $\Lambda_S = 2m$: $\bar{\eta} = 35\%$), während die Uniformität unverändert bleibt.

³Um entscheiden zu können, ob Licht an den Mantelflächen transmittiert werden kann, muß auch der azimutale Emissionswinkel φ_E bekannt sein. Voraussetzung dafür ist aber, daß das Licht mit $\theta_E = 90^\circ - \alpha_L \dots 90^\circ + \alpha_L$ emittiert wurde.

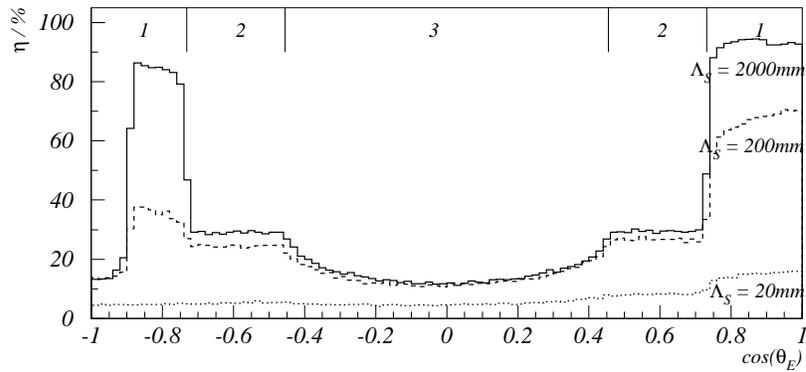


Abbildung 2.5: Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ im isotropen Quader für unterschiedliche Streulängen Λ_S

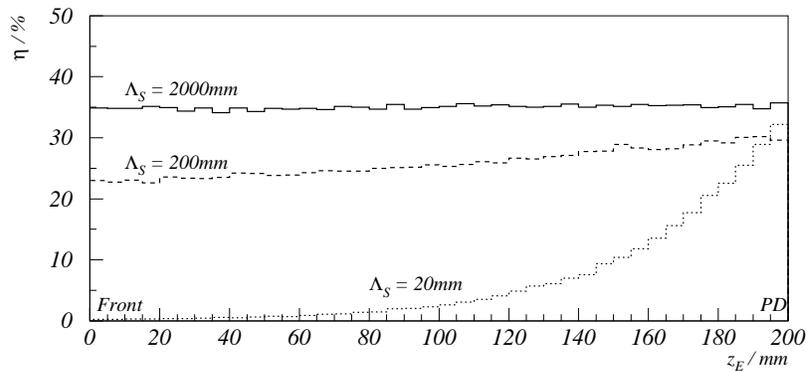


Abbildung 2.6: Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z_E im isotropen Quader für unterschiedliche Streulängen Λ_S .

Diese Aussagen gelten nicht mehr, sobald die Streulänge in der Größenordnung der Kristalllänge liegt: Der Anteil des Lichts, das ungestreut detektiert wird, nimmt hier stark ab, so daß die ursprüngliche Winkelverteilung zunehmend an Bedeutung verliert.

Dagegen hängt die mittlere Zahl von Streuungen bis zur Detektion nun vom Abstand Emissionsort $z_E \leftrightarrow$ Detektor ab. Da es bei mehreren aufeinanderfolgenden Streuungen auch wahrscheinlich ist, daß das Licht im dünnen Kristall zur Mantelfläche gestreut wird und dann den Kristall verläßt, nimmt die Nachweiswahrscheinlichkeit mit zunehmendem Abstand vom Detektor ab. Auch die Gesamtnachweiswahrscheinlichkeit nimmt mit abnehmender Streulänge ab, wie Abbildung 2.6 zeigt.

Diese Aussagen gelten im Prinzip für Streuung im Volumen wie für Streuung an der Oberfläche. Bei letzterer hängt die Streuwahrscheinlichkeit aber nicht von der zurückgelegten Wegstrecke, sondern von der Zahl der Reflexionen ab, was für eine hohe Lichtausbeute von Vorteil ist:

Licht, das in etwa parallel zur Längsachse läuft ($|\cos(\theta_E)| \approx 1$) und sich damit in einem detektierbaren Winkelbereich befindet, kann den Weg durch den Kristall auch bei hoher Oberflächenstreuwahrscheinlichkeit ungestreut zurücklegen. Licht aus einem nicht detektierbaren Winkelbereich ($|\cos(\theta_E)|$ klein) trifft dagegen häufiger auf eine Mantelfläche, wo es gestreut werden kann und damit die Möglichkeit erhält, doch noch detektierbar zu werden.

Dadurch kann auch eine extrem hohe Oberflächenstreuwahrscheinlichkeit (z.B. durch aufgerauhte Oberfläche) noch von Vorteil sein, während eine sehr kleine Streulänge kaum noch Licht in den Detektor läßt.

2.4 Doppelbrechende Medien

Im folgenden soll die Frage geklärt werden, ob bei der Lichtsammlung in optisch anisotropen Medien neue Effekte auftreten. Dazu wird, wie schon in Kapitel 1, eine extrem starke Doppelbrechung angenommen ($n_O = 2.4, n_{AO}^* = 1.8$)⁴, die in der Realität kaum vorkommt, die aber die auftretenden Effekte gut verdeutlicht.

Zwei Merkmale kennzeichnen die Doppelbrechung:

- (1) Die Polarisationsrichtungen von ordentlichem und außerordentlichem Strahl sind durch optische Achse und Wellennormale eindeutig festgelegt.
- (2) Die beiden Strahlen haben einen unterschiedlichen Brechungsindex, der des außerordentlichen ist zudem richtungsabhängig.

Während (1) einen vernachlässigbaren Einfluß hat (dies wird noch in Abschnitt 3.4 bestätigt werden), wirkt sich das gleichzeitige Vorhandensein unterschiedlicher Brechungsindizes stark auf die Lichtsammlung aus, da hierdurch die Grenzwinkel der Totalreflexion bestimmt werden:

Die Grenzbedingung für Totalreflexion ist im doppelbrechenden Fall am einfachsten über den \vec{k} -Vektor zu beschreiben. Ist k_{\parallel} die Komponente tangential zur Oberfläche und k_{\perp} die Normalkomponente, so folgt aus dem Brechungsgesetz (Seite 22) als

⁴ PbWO_4 : $n_O \approx 2.35, n_{AO}^* \approx 2.25$, genauer in Anhang B

Bedingung für Totalreflexion:⁵

$$\left(\frac{n'}{n}\right)^2 k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_{\perp}}{|\vec{k}|} < \sqrt{1 - \left(\frac{n'}{n}\right)^2}$$

Betrachten wir den Übergang Kristall \leftrightarrow Detektor: Die Normalkomponente ist hier die z-Komponente, so daß Licht in den Detektor gelangen kann, falls gilt:

$$\frac{k_z}{|\vec{k}|} = \cos(\theta) > \sqrt{1 - \left(\frac{n_{Kitt}}{n_{Kr}}\right)^2}$$

Da im anisotropen Medium zwei verschiedene Brechungsindizes auftreten, gibt es also zwei Bedingungen für Totalreflexion: Während die Bedingung für den ordentlichen Strahl noch einfach zu formulieren ist (da n_O konstant ist) und wie im isotropen Fall einem Kegel der Totalreflexion entspricht, gibt es im außerordentlichen Fall mit dem richtungsabhängigen Brechungsindex $n_{AO}(\vec{k})$ keine so einfache Formulierung mehr. Der „Kegel“ der Totalreflexion ist jetzt deformiert.⁶ Das gleiche gilt für den Kegel der Totalreflexion beim Übergang Kristall \rightarrow Luft, aus dem ebenfalls zwei Kegel werden.

Dies wirkt sich unmittelbar auf die verschiedenen Winkelbereiche, wie sie in Abbildung 2.2 (Seite 54) zu sehen sind, aus:

Waren die unterschiedlichen Winkelbereiche vorher klar durch einen Grenzwinkel getrennt, so gibt es nun jeweils einen Grenzwinkel für den ordentlichen und einen Grenzwinkelbereich für den außerordentlichen Strahl, so daß sich die Winkelbereiche gegenseitig überlappen.

2.4.1 Übergang Kristall \rightarrow Kitt

Um den noch unbekanntem Einfluß von Reflexionen an den Kristallflächen auszuschließen, wurden in der Simulation nur die direkt den Photodetektor treffenden Strahlen berücksichtigt.

Für den ordentlichen Strahl ergibt sich dann ein Grenzwinkel von $\cos(\alpha_O) = 0.78$, während für den außerordentlichen Strahl – je nach Lage der optischen Achse – $\cos(\alpha_{AO}) \geq 0.55$ gilt.

Abbildung 2.7 zeigt das Ergebnis dieser Simulation für die beiden Fälle, daß die optische Achse parallel bzw. senkrecht zur Längsachse steht. Bei beiden erkennt

⁵ Es kommt im folgenden ausschließlich auf die Richtung der Wellennormalen \vec{k} an, die Strahlrichtung \vec{s} ist dagegen unerheblich

⁶ Nur im Spezialfall optische Achse = Flächennormale handelt es sich um einen „reinen“ Kegel

man einen ersten Einbruch unterhalb von $\cos(\theta_E) \approx 0.78$, ab dem kein ordentlicher Strahl mehr detektiert werden kann. Der Bereich, ab dem auch kein außerordentlicher Strahl mehr in den Detektor gelangen kann, hängt dagegen von der Lage der optischen Achse ab: Ist sie parallel zur Längsachse, beginnt er abrupt unterhalb von $\cos(\theta_E) \approx 0.65$. Dieser Übergang ist nur deshalb so scharf, weil der Brechungsindex n_{AO} nur von θ abhängt und nicht von Azimutwinkel φ , so daß der Kegel der Totalreflexion nicht verformt ist.

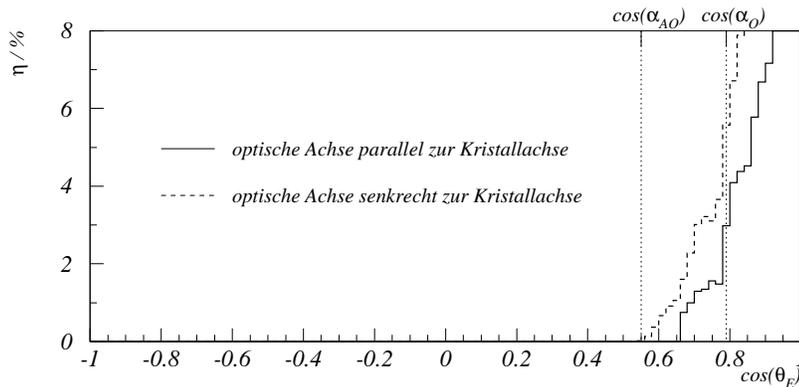


Abbildung 2.7: *Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ im doppelbrechenden Quader ohne Reflexionen. Außerordentliche Strahlen werden oberhalb von $\cos(\alpha_{AO}) \approx 0.55$ detektierbar, ordentliche oberhalb von $\cos(\alpha_O) \approx 0.78$.*

Anders sieht das Ergebnis aus, wenn die optische Achse z.B. senkrecht auf der Kristalllängsachse steht. Dies liegt daran, daß der Brechungsindex und damit die Grenze der Totalreflexion nicht nur von $\cos(\theta)$ abhängig sind, sondern auch vom Azimutwinkel φ . Daher sinkt die Nachweiswahrscheinlichkeit unterhalb der Grenze von $\cos(\theta_E) \approx 0.78$ kontinuierlich ab, bis sie bei $\cos(\theta_E) \approx 0.55$ schließlich zu Null wird.

2.4.2 Reflexion an der Mantelfläche

Nun soll die Frage geklärt werden, ob die Reflexion an der Mantelfläche einen Einfluß auf die Lichtsammlung hat. Im isotropen Kristall war dies (bei Totalreflexion an den Mantelflächen) nicht der Fall, da dort $\cos(\theta)$ erhalten war.

Die Frage ist also, ob auch hier $\cos(\theta) = \frac{k_z}{|k|}$ bei der Reflexion an der Mantelfläche konstant bleibt.

Auf der Mantelfläche ist k_z eine Tangentialkomponente und als solche nach dem Brechungs- und Reflexionsgesetz erhalten. $|k|$ läßt sich in Vakuumwellenzahl und

Brechungsindex aufspalten: $|\vec{k}| = n \cdot |\vec{k}_0|$. Während die Vakuumwellenzahl erhalten ist, ist der Brechungsindex nur erhalten, falls ein ordentlich einfallender Strahl auch ordentlich reflektiert wird. Damit ist $\cos(\theta) = \frac{k_z}{n \cdot |\vec{k}|}$ nicht konstant, da sich n bei der Reflexion an einer Mantelfläche ändern kann, während die Größe $\frac{k_z}{|\vec{k}_0|} = \cos(\theta) \cdot n$ immer erhalten ist.

Dies erweitert den detektierbaren Winkelbereich, wie folgendes Beispiel zeigt: Ein Strahl wird ordentlich unter dem Winkel $\cos(\theta_E) = 0.45$ emittiert und ist damit, falls er direkt auf die Grenzfläche zum Detektor fällt, nicht detektierbar.⁷ Die Erhaltungsgröße $\cos(\theta) \cdot n$ beträgt in diesem Beispiel $\cos(\theta_E) \cdot n_O$. Wird der Strahl bei der Reflexion außerordentlich, so muß gelten: $\cos(\theta_E) \cdot n_O = \cos(\theta) \cdot n_{AO} \Rightarrow \cos(\theta) = \cos(\theta_E) \cdot \frac{n_O}{n_{AO}} = 0.6$. Dieser Wert liegt über dem Grenzwinkel von $\cos(\alpha_{AO}) = 0.55$ für außerordentliche Strahlen, so daß der Strahl – durch die Reflexion an der Mantelfläche – doch noch detektiert werden kann.

Dieses Verhalten ist in Abbildung 2.8 zu sehen. Da der Einfluß von Reflexionen an der Frontfläche nicht geklärt ist, wurden in dieser Simulation nur Strahlen berücksichtigt, die nicht auf der Frontfläche reflektiert wurden.

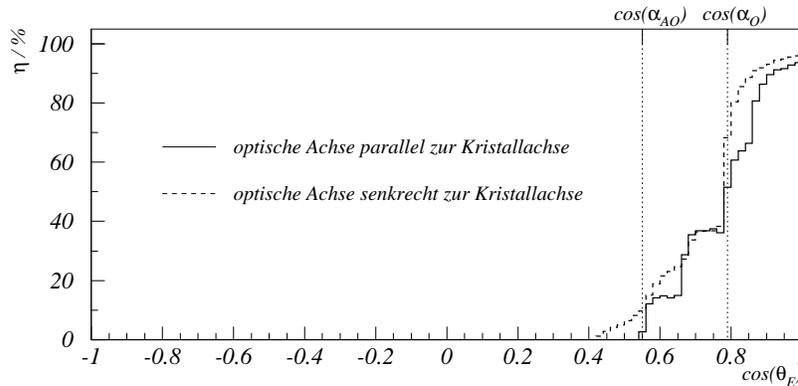


Abbildung 2.8: *Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ im doppelbrechenden Quader ohne Reflexionen an der Frontfläche.*

Vergleicht man diese Abbildung mit Abbildung 2.7, so erkennt man für beide Lagen der optischen Achse, daß die detektierbaren Strahlen schon bei kleineren Werten von $\cos(\theta_E)$ erscheinen. Insbesondere im Fall optische Achse \perp Längsachse erscheinen die ersten detektierten Strahlen schon unter einem Winkel von $\cos(\theta_E) \approx 0.42$. Dies ist deutlich unter der Grenze von $\cos(\alpha_{AO}) = 0.55$, die für Strahlen gilt, die nicht an einer Mantelfläche reflektiert wurden.

⁷Die Grenzwinkel lagen bei $\cos(\alpha_O) = 0.78$ bzw. $\cos(\alpha_{AO}) \geq 0.55$

Dieser Effekt ist unabhängig von der *Zahl* der Reflexionen; Entscheidend ist lediglich, daß ein Strahl, der ursprünglich einen hohen Brechungsindex sah, vor dem Verlassen des Kristalls einen niedrigeren Brechungsindex sieht. Da dieser Effekt auch in die andere Richtung möglich ist (ein ursprünglich detektierbarer Strahl wird nach Reflexion an der Mantelfläche nicht mehr detektierbar), werden die scharfen Grenzen zwischen den Winkelbereichen unschärfer.

2.4.3 Reflexion an den Stirnflächen

Bei der Reflexion an Front- oder Rückfläche muß unterschieden werden, ob die optische Achse parallel zur Längsachse (und damit senkrecht auf den beiden Stirnflächen) steht oder nicht.

Optische Achse parallel zur Längsachse:

In diesem Spezialfall steht die optische Achse senkrecht auf den Stirnflächen des Kristalls, so daß bei der Reflexion an ihnen keine Aufspaltung stattfindet, wie in Abbildung 1.27 auf Seite 49 zu sehen ist. Somit sind nur zwei Reflexionsarten möglich. Bei diesen bleibt auch n erhalten: Für den Reflex ordentlich \rightarrow ordentlich gilt dies immer, aber auch für außerordentlich \rightarrow außerordentlich bleibt n erhalten, da der Winkel zwischen \vec{k} und optischer Achse der gleiche bleibt und damit n konstant ist. Daher wechselt k_z lediglich das Vorzeichen und $|\vec{k}|$ bleibt erhalten, so daß kein neuer Effekt auftritt.

Dies erkennt man auch beim Vergleich der Abbildungen 2.9 und 2.8: Der Grenzwinkel der prinzipiellen Detektierbarkeit liegt nach wie vor bei $\cos(\theta_E) = 0.55$.

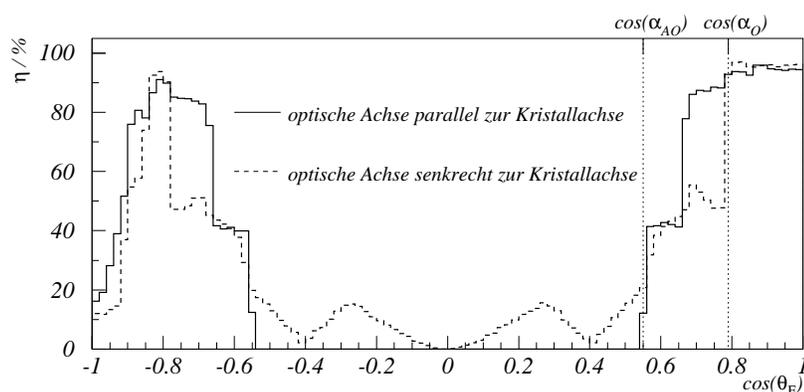


Abbildung 2.9: *Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ im doppelbrechenden Quader*

Optische Achse beliebig:

Ganz anders sieht das Bild aus, wenn die optische Achse beliebig im Kristall liegt, z.B. senkrecht zur Längsachse: Nun ist $|k_z|$ als Normalkomponente bei Reflexion an einer Stirnfläche nur dann erhalten, wenn auch der Brechungsindex gleich bleibt. Dies ist nur beim Reflex ordentlich \rightarrow ordentlich gegeben. In allen anderen Fällen wird sich $|k_z|$ ändern. Da die Tangentialkomponenten k_x und k_y konstant bleiben, kann sich dadurch $\cos(\theta) = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}$ bei jedem Reflex an den Stirnflächen ändern, so daß die Grenze für Totalreflexion überschritten werden kann und ein ursprünglich nicht detektierbarer Strahl dann doch noch detektierbar wird.⁸ Im Gegensatz zu Reflexionen an der Mantelfläche kommt es hier sehr wohl auf die *Zahl* der Reflexionen an diesen beiden Flächen an. Dadurch ist dieser Effekt auch sehr empfindlich von der Absorptionslänge abhängig, da diese die mittlere Weglänge des Strahls stark beeinflußt.

Dieser Effekt führt dazu, daß nun zusätzlich der Winkelbereich unter $\cos(\theta_E) \approx 0.4$ detektierbar wird, wie Abbildung 2.9 zeigt.

Obwohl das detektierte Licht für die beiden Lagen der optischen Achse aus unterschiedlichen Winkelbereichen stammt, wirkt sich das auf die mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit $\bar{\eta}$ kaum aus. Liegt die optische Achse parallel zur Längsachse, ist $\bar{\eta} = 31.4\% \pm 0.1\%$, liegt sie dagegen senkrecht dazu, so beträgt $\bar{\eta} = 30.7\% \pm 0.1\%$.

Die Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z_E (Uniformität) bleibt konstant und ist höher als bei einem Quader mit gemitteltem Brechungsindex (Abbildung 2.10). Während im isotropen Quader $\bar{\eta}$ nur etwa $21.5\% \pm 0.1\%$ beträgt, so kommt der doppelbrechende Quader auf $30.7\% \pm 0.1\% - 33.0\% \pm 0.1\%$, je nach Lage der optischen Achse.

2.5 Pyramidenstumpf-Geometrie

Die PbWO_4 -Kristalle, die für das CMS-Kalorimeter zum Einsatz kommen werden, sind nicht quaderförmig, sondern haben die Form eines Pyramidenstumpfes, um bei einem Kalorimeterradius von 1.3m lückenlos zu bleiben (Abbildung 2.11). Die kleinere Frontfläche ist dabei auf den Wechselwirkungspunkt ausgerichtet, während auf der größeren Rückfläche der Detektor in Form zweier Avalanche-Photo-Dioden (APD) sitzt.

Dadurch sind zwar die beiden Stirnflächen noch parallel, die vier Mantelflächen stehen aber nicht mehr im rechten Winkel dazu. Die Abweichung δ vom rechten Winkel kann aus den Kristallabmessungen berechnet werden: $\delta = \arctan\left(\frac{F-R}{2L}\right)$ ⁹

⁸ Dieser Effekt ist genauso gut auch in die andere Richtung möglich, so daß ein ursprünglich detektierbarer Strahl nach Reflexionen an den Stirnflächen nicht mehr detektierbar wird

⁹ F = Kantenlänge der Frontfläche, R = Kantenlänge der Rückfläche, L = Kristalllänge

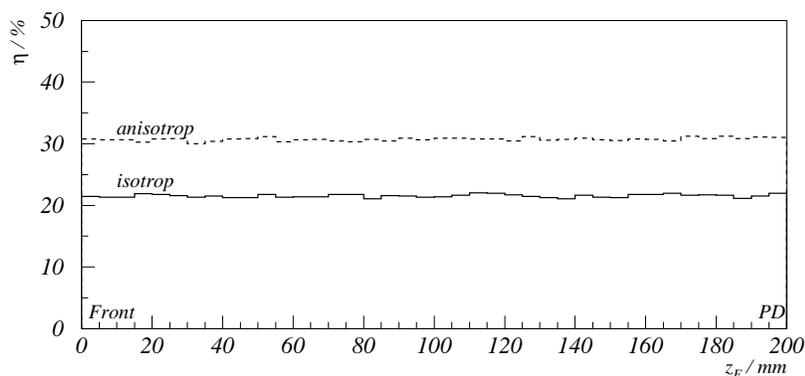


Abbildung 2.10: Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z_E im doppelbrechenden bzw. isotropen, nicht absorbierenden Quader

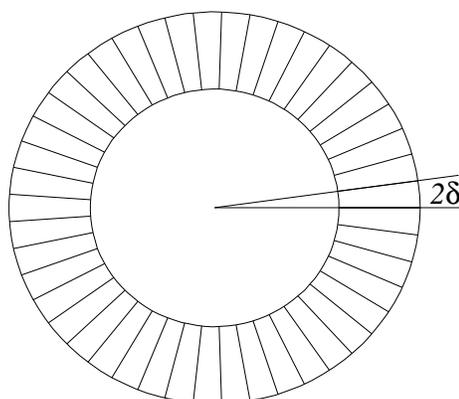


Abbildung 2.11: Um eine Kugel lückenlos zu schließen, müssen die Kristalle die Form eines Pyramidenstumpfes besitzen.

(CMS-ECAL: $\delta \approx 0.4^\circ$). Dadurch ändert sich der Winkel $|\theta|$ eines Strahls bei jeder Reflexion an einer Mantelfläche um 2δ : Läuft der Strahl in Richtung Front, so wird $|\theta|$ zunehmend größer, läuft er dagegen in Richtung Detektor, so nimmt $|\theta|$ ab, wie Abbildung 2.12 zeigt.

Dies bedeutet, daß ein Strahl, der im Quader aufgrund seines Emissionswinkels θ_E nicht detektierbar wäre, im Pyramidenstumpf nach einer oder mehreren Reflexionen an den Mantelflächen doch noch den Winkelbereich der Totalreflexion verlassen kann und damit detektierbar wird. Dadurch werden die scharfen Grenzen zwischen detektierbarem Licht und nicht detektierbarem Licht unschärfer, wie auch in Abbildung 2.13 zu sehen ist.

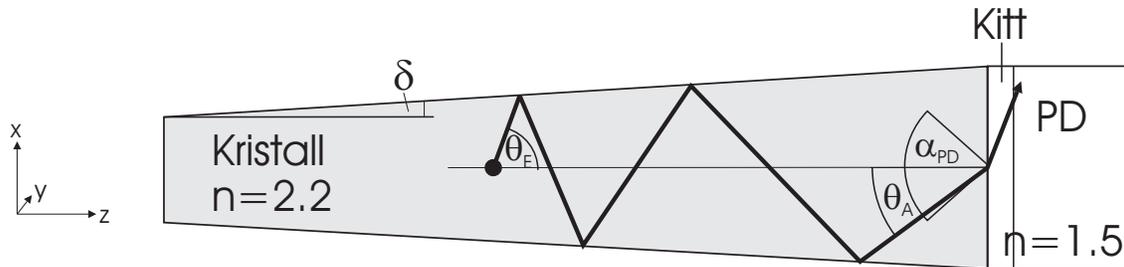


Abbildung 2.12: Fokussierungseffekt in einem Pyramidenstumpf: θ nimmt nach jeder Reflexion an der Mantelfläche um 2δ ab.

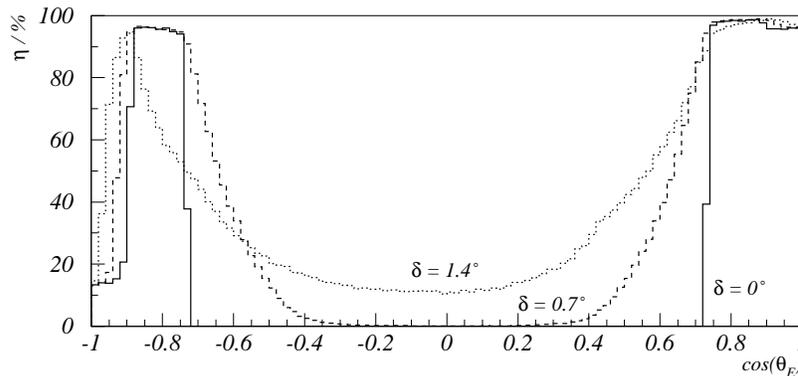


Abbildung 2.13: Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ im isotropen Pyramidenstumpf (Fokussierungseffekt)

Da das Licht, das in der Nähe der Frontfläche emittiert wird, auf seinem Weg zum Detektor im Mittel häufiger an den Mantelflächen reflektiert wird als das Licht, das in der Nähe des Detektors entsteht, wird dieser „Fokussierungseffekt“ genannte Vorgang bei ersterem deutlich stärker wirken als bei letzterem.

Damit steigt die Nachweiswahrscheinlichkeit für Licht mit zunehmender Entfernung vom Detektor an (Abbildung 2.14).

Für $\delta = 1.4^\circ$ erkennt man ein Abflachen der Steigung unterhalb von $z_E \approx 70\text{mm}$. Der Fokussierungseffekt ist hier so stark, daß auch Licht, das sehr steil auf eine Mantelfläche trifft, detektiert werden kann. Da bei diesem an den Mantelflächen keine Totalreflexion mehr vorliegen muß, führen die Transmissionsverluste zu einem flacheren Anstieg der Kurve zur Frontfläche hin.

Der Fokussierungseffekt hat auf die Uniformität der Lichtausbeute die genau entgegengesetzte Wirkung wie der Absorptionseffekt. Während ersterer aber die Ge-

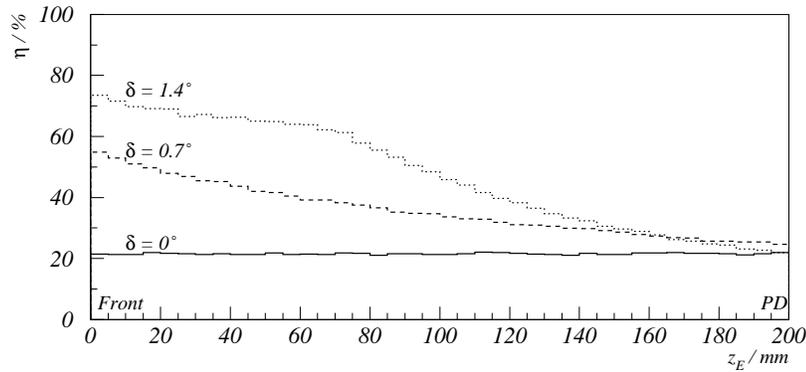


Abbildung 2.14: *Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z_E im isotropen Pyramidenstumpf (Fokussierungseffekt)*

samtlichtausbeute $\bar{\eta}$ erhöht, wirkt sich der Absorptionseffekt stets mit verminderter Lichtausbeute aus.

Ist das Medium zudem doppelbrechend, wirkt sich das auch auf die seitliche Reflexion aus: Da die Tangentialkomponente k_{\parallel} nicht mehr mit k_z identisch ist, ist k_z auch keine Erhaltungsgröße mehr, wie noch beim Quader. Wie schon bei den Stirnflächen kann jetzt auch bei Reflexion an den Mantelflächen k_z durch den unterschiedlichen Brechungsindex von einfallendem und reflektiertem Strahl verändert werden. Dieser Effekt ist aber stark von δ abhängig:

Bei kleinen Winkeln ($\delta \leq 1^\circ$), wie sie z.B. beim ECAL des CMS-Detektors vorkommen, ist der Unterschied zwischen k_{\parallel} und k_z so gering, daß die Uniformität durch die Doppelbrechung auch im Pyramidenstumpf nicht verändert wird.

Aber auch bei etwas größeren Winkeln ($\delta = 1.4^\circ$) ist dieser Effekt noch zu vernachlässigen. Daß sich die Uniformität dennoch stark ändert, wie in Abbildung 2.15 am Vergleich eines isotropen und doppelbrechenden Pyramidenstumpfes zu sehen ist, hat einen anderen Grund:

Wird das Licht in der Nähe des Photodetektors emittiert, ist – wie im Quader – die Lichtausbeute des doppelbrechenden Kristalls höher. Da der Fokussierungseffekt des isotropen Kristalls jedoch stärker ist, wird unterhalb von $z_E \approx 100\text{mm}$ die Lichtausbeute des isotrope Kristall höher. Dies liegt daran, daß in diesem optisch negativen Beispielkristall die Verluste durch Transmission an den Mantelflächen früher beginnen ($n_{AO}^* = 1.8$) als im isotropen Kristall ($n = 2.2$). Daher ist diese Aussage nicht pauschal gültig, sondern hängt stark von den Brechungsindizes der verglichenen Kristalle ab.

Der Effekt durch die Nichtparallelität von k_{\parallel} und k_z auf den Mantelflächen ist dagegen vernachlässigbar.

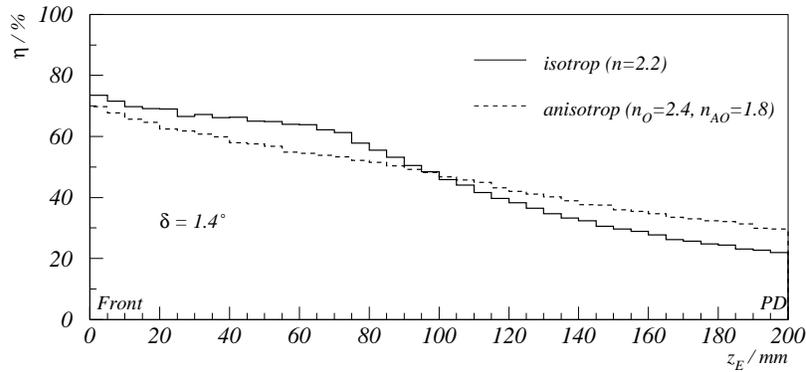


Abbildung 2.15: Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z_E im isotropen und doppelbrechenden Pyramidenstumpf

2.6 Bedeckungsfaktor

Wird die Rückfläche nicht vollständig vom Detektor bedeckt, wie dies mit den zwei APDs beim PbWO_4 der Fall sein wird (APD-Fläche: $5 \times 5 \text{mm}^2$), so nimmt die Nachweiswahrscheinlichkeit nicht linear mit der Bedeckung ab, falls die ungenutzte Fläche nicht mit Kitt bedeckt ist. Der Grund dafür liegt in dem Licht des Winkelbereichs $\cos(\theta) = \cos(\alpha_L) \dots \cos(\alpha_{PD})$. Dies wird an den Stirnflächen totalreflektiert, falls sich jenseits der Grenzfläche Luft befindet ($n_L = 1$). Beim Übergang Kristall \rightarrow Kitt ($n_{Kitt} = 1.5$), der an dem vom Detektor bedeckten Teil der Rückfläche vorkommt, wird dagegen ein Großteil transmittiert. Trifft das Licht auf einen Ort der Rückfläche, der nicht von Detektor und Kitt bedeckt ist, wird es daher totalreflektiert und hat dann nach einem Umlauf im Kristall erneut die Chance, den Detektor zu treffen und somit doch noch detektiert zu werden (Abbildung 2.16).

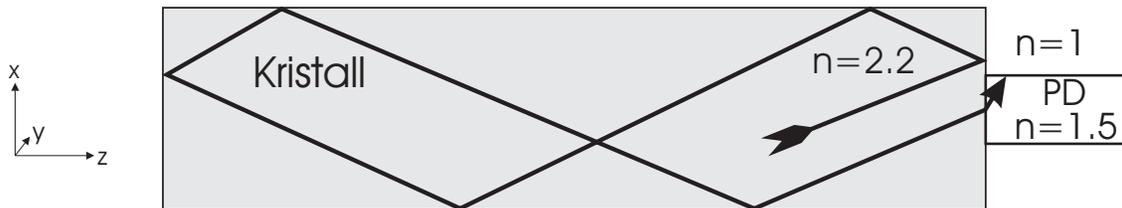


Abbildung 2.16: Trifft der Strahl nicht direkt den Detektor, kann es nach weiteren Umläufen gelingen

Diese Mehrfachumläufe sind nur möglich, falls die Absorptionslänge groß gegen die

Kristalllänge ist. Nimmt die Absorptionslänge ab, so wird der Zusammenhang zwischen Nachweiswahrscheinlichkeit und Bedeckungsgrad schließlich linear. Abbildung 2.17 zeigt den Zusammenhang für starke und schwache Absorption.

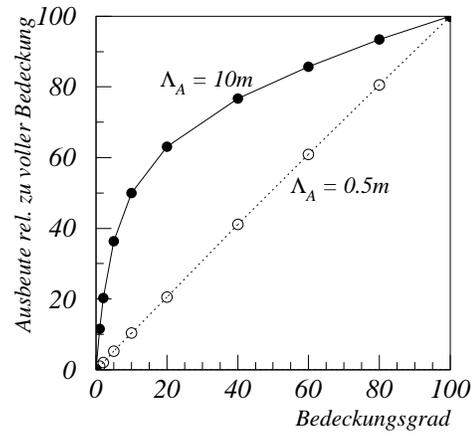


Abbildung 2.17: Abnahme der Effizienz mit dem Bedeckungsgrad bei $\Lambda_A = 10m$ bzw. $0.5m$

Die Uniformität der Lichtsammlung bleibt von der Bedeckung unbeeinflusst, wie in Abbildung 2.18 an zwei Beispielen zu sehen ist.

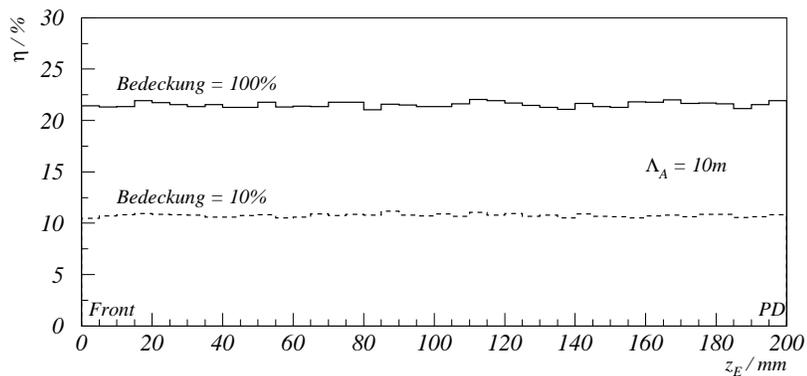


Abbildung 2.18: Die Uniformität der Lichtsammlung hängt nicht vom Bedeckungsgrad ab

2.7 Verpackung

Um die Lichtausbeute zu erhöhen, können die Kristallflächen mit einem möglichst gut reflektierenden Material verpackt werden. Dadurch kann Licht, daß den Kristall schon verlassen hat, wieder in diesen zurückreflektiert werden und die Verluste dadurch verringert werden. Die Verpackung darf nicht in optischem Kontakt mit dem Kristall stehen, da dies die Grenzen der Totalreflexion stark verändern würde und zu anderen Effekten führt, die hier aber nicht untersucht wurden.

Als sehr effektiv erweist sich die **Frontverpackung**: Tritt Licht durch die Frontfläche wieder ein, so ist es im Kristall innerhalb des schmalen Kegels der Totalreflexion α_L , der innerhalb des weiteren Totalreflexionskegels α_{PD} liegt, so daß das Licht in einen detektierbaren Winkelbereich eintritt und seine Detektion wahrscheinlich ist.

Damit steigt die Nachweiswahrscheinlichkeit für Licht, das im Winkelbereich $\cos(\theta_E) = -1 \dots -\cos(\alpha_L)$ emittiert wurde, stark an, wie aus dem Vergleich in Abbildung 2.19 sichtbar wird.

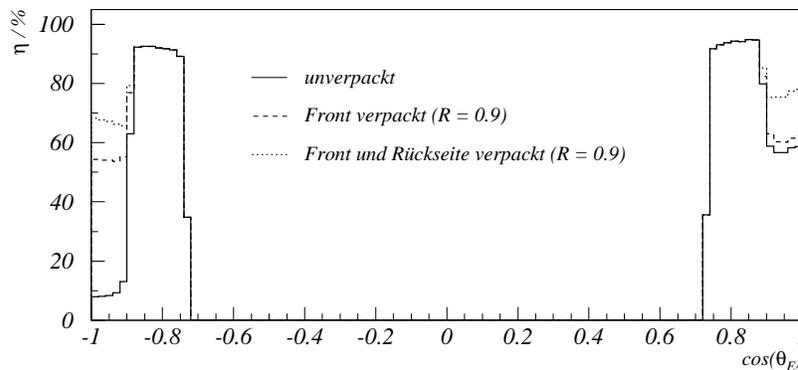


Abbildung 2.19: *Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$ in einem isotropen Quader mit und ohne Front- und Rückflächenverpackung (Reflektivität = 90% spiegelnd)*

Liegt die Detektorbedeckung der **Rückfläche** unter 100%, so ist eine Verpackung der Restfläche ebenfalls sinnvoll, um Licht aus dem Winkelbereich $\cos(\theta_E) > \cos(\alpha_L)$, das den Detektor verfehlt hat und transmittiert wird, wieder zurück in den Kristall zu reflektieren. Dort durchläuft es den Kristall, bis es wieder steil auf die Frontfläche trifft und mit hoher Wahrscheinlichkeit transmittiert wird. Um nicht an der Frontfläche verloren zu gehen, ist die Rückflächenverpackung also nur in Kombination mit der Frontverpackung sinnvoll. Abbildung 2.19 zeigt den Erfolg dieser Maßnahme.

In diesem Beispiel beträgt die Fläche des Detektors 60% der Rückfläche. Die Gesamtnachweiswahrscheinlichkeit steigt durch die Frontverpackung alleine von $\bar{\eta} = 18.5\% \pm 0.1\%$ auf $\bar{\eta} = 21\% \pm 0.1\%$. Die Verpackung der Rückfläche steigert die Gesamtnachweiswahrscheinlichkeit nochmals auf $\bar{\eta} = 22.5\% \pm 0.1\%$.

Je kleiner der Bedeckungsfaktor der Rückfläche ist, desto größer ist der Gewinn durch die Bedeckung der freien Restfläche.

Die **Seitenverpackung** der Mantelflächen schließlich ist nur bedingt nutzbringend: Licht, das durch die Mantelfläche wiedereintritt, besitzt einen Winkel von mindestens $\theta = 90^\circ \pm \alpha_L$. Damit ist $\cos(\theta) = \pm \sin(\alpha_L)$ und damit im Bereich um den Nullpunkt, der nicht detektierbar ist.

Nachgewiesen werden kann jedoch nur Licht, dessen Winkel größer als α_{PD} ist. Kann die Winkeldifferenz dazu ($90^\circ - \alpha_L - \alpha_{PD} = 20^\circ$) nicht durch andere Effekte wettgemacht werden, so ist die Seitenverpackung ohne Einfluß auf das detektierbare Licht.

Drei Effekte können die nötige Winkeländerung verursachen:

1. Der Fokussierungseffekt
2. Die Doppelbrechung
3. Streuung im Kristall oder an seinen Rändern

Der Fokussierungseffekt ist bei den Geometrien und Brechungsindizes der verwendeten PbWO_4 -Kristallen nicht in der Lage, die Differenz zu überbrücken.

Die Doppelbrechung hingegen kann bei den verwendeten PbWO_4 -Kristallen einen kleinen Teil des seitlich zurückreflektierten Lichts in detektierbare Winkelbereiche transformieren.

Die Streuung ist das effektivste Mittel, den Winkel stark zu verändern, so daß die Seitenverpackung umso wichtiger wird, je kleiner die Streulänge wird.

Die **Reflexionsart** (diffus oder spiegelnd) hat einen vernachlässigbaren Einfluß auf die Lichtsammlung: Während eine vollständig diffuse Verpackung eine Nachweiswahrscheinlichkeit von $\bar{\eta} = 22.6\% \pm 0.1\%$ bewirkt, ergibt sich bei einer spiegelnden Verpackung ein Wert von $\bar{\eta} = 22.5\% \pm 0.1\%$. Die Effizienz der Verpackung hängt somit nur vom Reflexionskoeffizienten ab.

2.8 Brechungsindex des Kitts

Im ersten Abschnitt wurde gezeigt, daß die Hauptursache der niedrigen Lichtausbeute am Übergang vom optisch dichten zum optisch dünnen Medium liegt. In unseren

bisherigen Beispielen waren der Brechungsindex von Photodetektor und Kitt stets gleich. Im allgemeinen ist das nicht so: Wird das Licht über eine Photodiode ausgelesen, die aus Silizium mit einem Brechungsindex $n_{Si} \approx 3.45$ besteht, ist hier der Kristall das optisch dünnere Medium. Könnte man die Diode direkt mit dem Kristall verbinden, gäbe es keine Totalreflexion und die Lichtausbeute wäre hoch. Da das Licht aber erst durch den optischen Kitt muß, ist dieser der begrenzende Faktor, da es in der Praxis nur Kitt mit einem Brechungsindex von $n_{Kitt} = 1.45 \dots 1.7$ gibt.

Abbildung 2.20 zeigt, wie sich der Brechungsindex des Kitts n_{Kitt} auf die Gesamtnachweiswahrscheinlichkeit $\bar{\eta}$ auswirkt, falls Kristall und Detektor den gleichen Brechungsindex $n_{Kr} = n_{PD} = 2.2$ besitzen und n_{Kitt} zwischen 1.0 und 2.2 variiert.

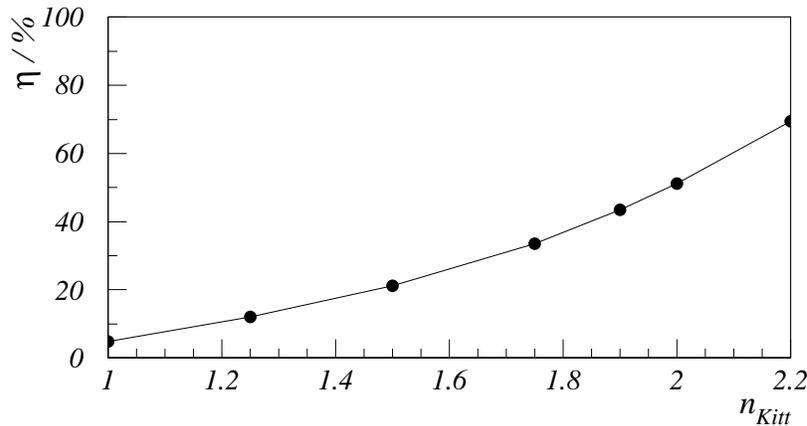


Abbildung 2.20: *Abhängigkeit der Lichtausbeute $\bar{\eta}$ vom Brechungsindex des Kitts n_{Kitt}*

2.9 Antireflexschicht am Photodetektor

Die APD ist mit einer Passivierungsschicht aus Si_3N_4 beschichtet, das nach Mitteilung des Herstellers Hamamatsu einen Brechungsindex von $n_{pass} = 1.7$ besitzt. Für den Übergang Luft $\rightarrow \text{Si}_3\text{N}_4 \rightarrow \text{Si}$ wirkt sie als Antireflexbeschichtung, da Si eine Brechungsindex von 3.45 besitzt und die optimale Entspiegelung mit einem Material funktioniert, dessen Brechungsindex dem geometrischen Mittel entspricht: $\sqrt{1.0 \cdot 3.45} = 1.86$

Beim Übergang Kitt $\rightarrow \text{Si}_2\text{N}_3 \rightarrow \text{Si}$ sollte die Passivierungsschicht den Brechungsindex $n_{pass} = \sqrt{n_{Kitt} \cdot n_{Si}}$ besitzen. Für $n_{Kitt} = 1.6$ ergibt dies $n_{pass} = 2.35$.

Abbildung 2.21 zeigt, wie sich ein unterschiedlicher Brechungsindex der Passivie-

rungsschicht auf die Transmission auswirkt¹⁰. Dabei wird immer davon ausgegangen, daß die Dicke der Schicht optimal an Wellenlänge und Brechungsindex angepaßt ist ($d = \frac{\lambda}{4n}$).

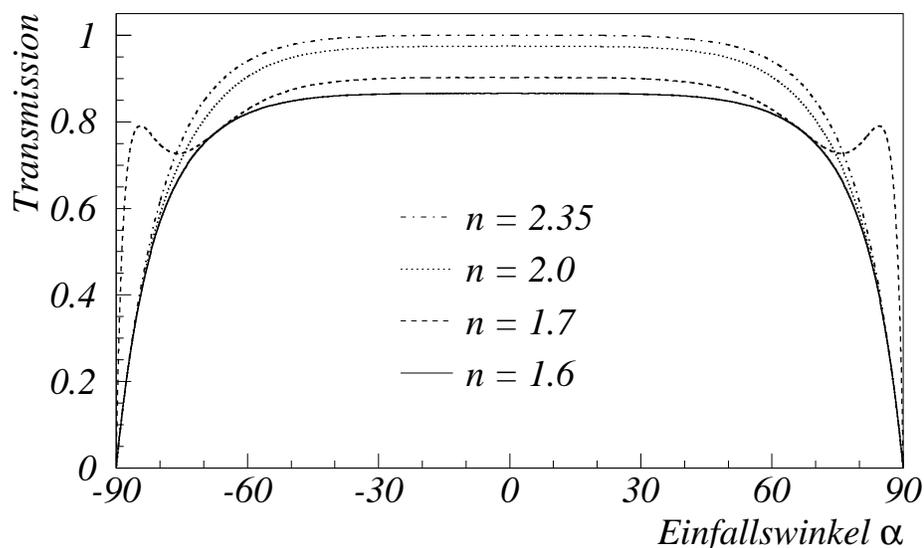


Abbildung 2.21: *Entspiegelung des Übergangs $n = 1.6 \rightarrow n' = 3.45$ für verschieden Brechungsindizes der Antireflexbeschichtung*

Verglichen mit dem Fall $n_{pass} = n_{Kitt} = 1.6$, was einem Fehlen dieser Schicht gleichkommt, erkennt man den schon merklichen Einfluß der schlecht angepaßten Schicht mit $n_{pass} = 1.7$. Insbesondere bei sehr großen Einfallswinkeln ist die Transmission deutlich höher¹¹. Gelänge es, den Brechungsindex auf $n_{pass} = 2.0$ anzuheben, wäre der Effekt schon fast so gut wie bei einer optimal angepaßten Schicht mit $n_{pass} = 2.35$.

Aus einer Simulation ergibt sich folgender Zusammenhang mit der Lichtausbeute $\bar{\eta}$:

n_{pass}	$T_{\alpha=0}$	$\bar{\eta}/\bar{\eta}(n_{pass} = 2.35)$
1.6	86.6%	89%
1.7	90.2%	93%
2.0	97.6%	97%
2.35	100.0%	100%

¹⁰Bei einer Gleichverteilung von s- und p-polariertem Licht

¹¹Das Wiederansteigen der Transmissionskurve bei sehr großen Einfallswinkeln liegt daran, daß das Licht in der Passivierungsschicht den Weg $3 \cdot \frac{\lambda}{4n}$ zurücklegt. Wie bei allen ungeraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{4n}$ funktioniert die Entspiegelung dann optimal.

2.10 Absorption im Kitt

Je nach Dicke d des optischen Kitts hat seine Absorptionlänge Λ_{AK} einen großen Einfluß auf die Lichtausbeute $\bar{\eta}$. Würde das Licht nur senkrecht durch den Kitt gehen, wäre der Zusammenhang $\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 \cdot e^{-\frac{d}{\Lambda_{AK}}}$. Für Licht, das die Kittschicht unter einem Winkel durchquert, ist der Weg aber länger, so daß es auch stärker absorbiert wird.

Aus Simulationen mit unterschiedlichen Absorptionen ergab sich, daß sich die Abhängigkeit gut nähern läßt, indem man die Kittdicke mit dem Faktor 1.8 multipliziert, so daß $\bar{\eta} \approx \bar{\eta}_0 \cdot e^{-1.8 \frac{d}{\Lambda_{AK}}}$ gilt. Die Uniformität der Lichtsammlung wird dadurch nicht beeinflußt.

Kapitel 3

Simulation mit Licobix

Eine analytische Lösung des Lichtsammlungsproblems ist nur für quaderförmige Kristalle durchführbar [15]. Um andere Geometrien, Verpackungen, Doppelbrechung und weitere Effekte berücksichtigen zu können, ist eine Simulation mit einem Strahlverfolgungsprogramm erforderlich.

Das ECAL des L3-Detektors besteht ebenfalls aus Szintillationskristallen (BGO, nicht doppelbrechend). Für dessen Entwicklung wurde damals das Simulationsprogramm „LIGHT II“ entworfen, das seine Funktionsfähigkeit in zahlreichen Vergleichen sowohl mit analytischen Rechnungen als auch mit Messungen demonstriert hat [16]. Da das Programm aber keine Doppelbrechung simulieren kann, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein neues Programm mit dem Namen „Licobix“ (Light Collection in Birefringent Xtals) geschrieben.

3.1 Funktionsweise von Licobix

Die Simulation der Lichtsammlung geschieht dabei über eine Monte-Carlo-Simulation folgendermaßen:

Aus dem gesamten Kristallvolumen wird mit drei Zufallszahlen ein Startpunkt für den Strahl gewählt. Ebenfalls über Zufallszahlen wird die Richtung dieses Strahls bestimmt, wobei die Emission isotrop in den Raum erfolgt. Ob der Strahl ordentlich oder außerordentlich ist, wird ebenfalls per Zufall entschieden, wobei beide Varianten gleich wahrscheinlich gewählt werden.

Nun wird der nächste Auftreffpunkt des Strahls auf einer Grenzfläche ermittelt und die Entfernung bis dorthin bestimmt. Aufgrund der vorgegebenen Absorptions- bzw. Streulängen werden über Zufallszahlen die Entfernungen bestimmt, nach denen der Strahl absorbiert bzw. gestreut wird. Nun kann entschieden werden, ob der Strahl

vor Auftreffen auf diese Fläche absorbiert bzw. gestreut wird.

Wird er absorbiert, so endet die Strahlverfolgung und der Strahl wird als „nicht detektiert“ registriert.

Bei einer Streuung wird ab dem Streuort eine neue Strahlrichtung mit isotroper Richtungsverteilung gewählt.

Trifft er auf die Grenzfläche, so wird zunächst aus der Strahlrichtung die Wellennormale \vec{k} berechnet. Die Lösung des Reflexions- und Brechungsgesetzes muß in dem Koordinatensystem geschehen, in dem für die Flächennormale $\vec{N} = \vec{e}_z$ gilt und $k_2 = 0$. Daher müssen \vec{k} und \vec{e} erst in dieses Koordinatensystem transformiert werden. Nun kann das Reflexions- und Brechungsgesetz angewandt werden, mit dessen Ergebnissen die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten ausgerechnet werden können. Auf deren Grundlage wird durch entsprechend gewichtete zufällige Wahl entschieden, welcher Strahl weiterverfolgt werden soll. Dessen Richtung muß wieder in das ursprüngliche Koordinatensystem zurücktransformiert werden. Wird der außerordentliche Strahl weiterverfolgt, muß noch aus der Wellennormale \vec{k} die Strahlrichtung \vec{S} ermittelt werden.

Dies geschieht solange, bis der Strahl absorbiert wird oder den Kristall verläßt.

Verläßt der Strahl den Kristall, gibt es mehrere Möglichkeiten: Trifft er weder auf Verpackung noch Detektor, so endet die Strahlverfolgung und der Strahl wird als „nicht detektiert“ registriert.

Trifft er eine der Verpackungen, so wird per Zufallszahl aufgrund des Reflexionskoeffizienten entschieden, ob der Strahl reflektiert oder absorbiert wird. Findet Reflexion statt, so läßt sich bei metallischer Reflexion die Richtung des reflektierten Strahls ausrechnen; Bei diffuser Reflexion wird eine zufällige Richtung so gewählt, daß sie nach dem Lambertschen Gesetz kosinusverteilt ist.

Das Programm simuliert stets einen vollverpackten Kristall. Um Ergebnisse für andere Verpackungsvarianten (z.B. nur Frontverpackung) zu erhalten, merkt sich das Programm aber, ob der Strahl unterwegs die Front-, Seiten- oder Rückseitenverpackung getroffen hat.

Gelangt der Strahl über den optischen Kitt in den Detektor, ohne im Kitt absorbiert oder am Detektor reflektiert zu werden, wobei eine Antireflexschicht des Detektors bei der Berechnung des Reflexionskoeffizienten berücksichtigt wird, so wird der Strahl als „detektiert“ registriert.

Da dies aber zunächst nur für den vollverpackten Kristall stimmt, wird nun entschieden, bei welchen anderen Verpackungsvarianten dies ebenfalls der Fall gewesen wäre. Wurde unterwegs z.B. nur die Frontverpackung getroffen, so wäre der Strahl also auch in einem Kristall detektiert worden, bei dem nur die Front, Front+Seite oder Front+Rückseite verpackt sind. Dagegen wäre dieser Strahl z.B. in einem un-

verpackten oder nur seitlich verpackten Kristall nicht detektiert worden, da hier die Frontverpackung fehlt.

So kann für alle acht Verpackungsvarianten¹ getrennt registriert werden, ob der Strahl detektiert wurde oder nicht.

Um Endlosverfolgungen bei fehlender Absorption zu verhindern, wird die Strahlverfolgung aber nach spätestens 2000 Reflexionen abgebrochen und der Strahl als „nicht detektiert“ gewertet.

Nachdem die Verfolgung dieses Strahls abgeschlossen ist, werden die Informationen abgespeichert.

Dieser Vorgang wiederholt sich mit weiteren Strahlen so oft, bis die gewünschte Anzahl an Strahlverfolgungen erreicht ist.

3.2 Simulierbare Eigenschaften

Licobix kann folgende Eigenschaften in der Simulation berücksichtigen:

Kristall

- Kristall mit Quader- oder Pyramidenstumpf-Geometrie
- Spektrale Verteilung des Szintillationslichts
- optisch isotrop oder doppelbrechend, mit Dispersion ($n(\lambda)$ bzw. $n_O(\lambda), n_{AO}^*(\lambda)$)
- Lage der optischen Achse
- Absorptionslänge $\Lambda_A(\lambda)$
- Streulänge Λ_S
- Wahrscheinlichkeit für Oberflächenstreuung

Kitt

- Brechungsindex des Kitts mit Dispersion ($n_{Kitt}(\lambda)$)
- Absorptionslänge des Kitts $\Lambda_{AK}(\lambda)$

¹1. Unverpackt, 2. Front, 3. Seite, 4. Rückseite, 5. Front+Seite, 6. Front+Rückseite, 7. Seite+Rückseite, 8. Front+Seite+Rückseite

- Dicke der Kittschicht
- Größe der Kittfläche

Photodetektor

- Brechungsindex des Photodetektors
- Antireflexschicht (Brechungsindex n und Dicke d)
- Zahl der Detektoren
- Größe der Detektoren
- Position der Detektoren
- Reflektivität der Detektorverpackung, diffus oder spiegelnd

Verpackung

- Verpackung von Frontfläche, Mantelflächen und detektorfreier Rückfläche
- Seitenverpackung auch unvollständig
- Reflexionskoeffizient
- spiegelnde oder diffuse Reflexion
- Abstand Verpackung \leftrightarrow Kristall

3.3 Ergebnisse der Simulation

Als Ergebnis der Simulation liefert Licobix folgende Größen:

- Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z_E
- Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\cos(\theta_E)$
- Anzahl der Reflexionen aller erzeugten und der detektierten Strahlen
- Zurückgelegter Weg aller erzeugten und der detektierten Strahlen
- Winkelverteilung (θ, φ) der Strahlen an der Rückseite und im Kitt

- Auftrefforte auf der Rückseite
- Wellenlängenspektrum der emittierten und detektierten Strahlen

In Anhang C wird beschrieben, wie die einzelnen Parameter an das Programm übergeben werden können und in welcher Form die Informationen abgespeichert werden.

3.4 Vergleich mit LIGHT II

Um die Ergebnisse, die Licobix liefert, zu überprüfen, wurden die Ergebnisse mit denen des bewährten LIGHT II-Programms verglichen.

LIGHT II unterscheidet sich aber in zwei Punkten von Licobix:

- Es berücksichtigt nicht die Polarisierung des Strahls und kann daher bei der Reflexion und Brechung nicht die genauen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten berechnen, die ja polarisationsabhängig sind. Daher wird mit (aus s- und p-Polarisation) gemittelten Koeffizienten gerechnet.
- Es stellt die Strahlverfolgung bereits nach 500 Reflexionen ein, während Licobix maximal 2000 Reflexionen zuläßt.

Nachdem Licobix in diesen zwei Punkten (für diesen Vergleich) an LIGHT II angeglichen wurde, wurden acht verschiedene Konfigurationen jeweils von beiden Programmen berechnet. Die Absorptionslängen betragen 1m bzw. 3m mit Bedeckungsfaktoren von 100%, 40%, 7% und 3.5%.

Die Ergebnisse beider Simulationen stimmen sehr gut überein, wie an dem Beispiel in Abbildung 3.1 zu erkennen ist.

Der Unterschied in der mittleren Nachweiswahrscheinlichkeit beider Programme lag dabei in sieben der acht Fälle innerhalb des statistischen Fehlers (1σ) (Die Simulation von Licobix geschah mit 5 Millionen Strahlen, die von LIGHT II nur mit 1 Million. Daher wurde der Fehler von Licobix zu Null angesetzt und nur der Fehler von LIGHT II betrachtet).

Schließlich wurden die Auswirkungen der beiden Näherungen, die in LIGHT II verwendet werden, untersucht:

Dabei stellte sich heraus, daß die Näherung mit polarisationsunabhängig gemittelten Fresnelformeln für die Simulation recht gut funktioniert: Nur bei den Konfigurationen mit einer Absorptionslänge von 3m wichen die Werte, die aus der Simulation mit genäherten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten stammten, im Mittel um

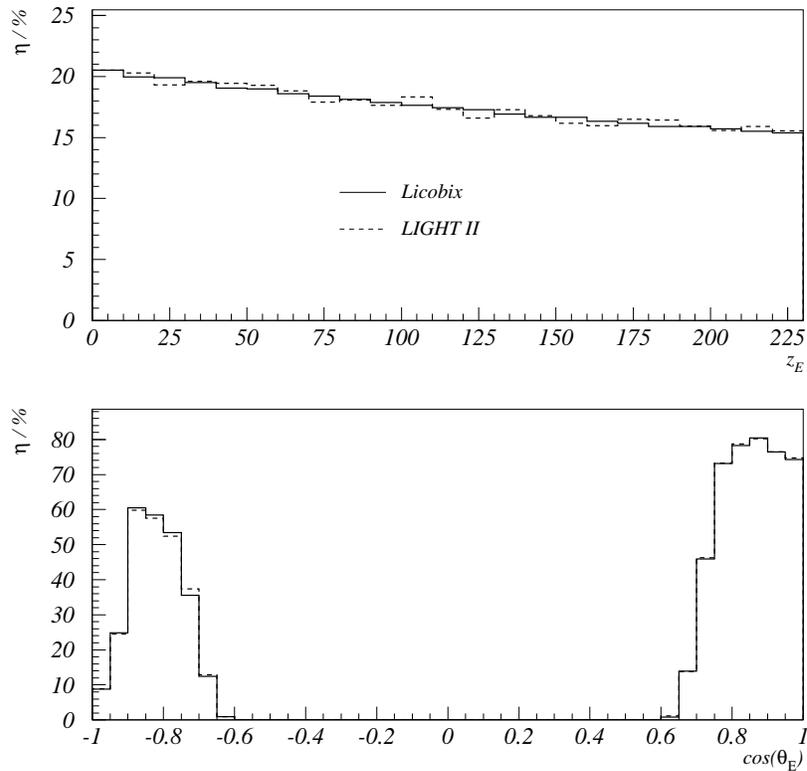


Abbildung 3.1: *Lichtsammungssimulation mit Licobix und LIGHT II*

2% von den Werten, die aus der Simulation mit exakter Rechnung stammen, nach unten ab.

Auch die Reflexionszahlbeschränkung auf 500 Reflexionen machte sich kaum im Simulationsergebnis bemerkbar. Lediglich bei den Konfigurationen mit einer Absorptionslänge von 3m gab es kleine Abweichungen, die weniger als 1% betragen, bei einer Absorptionslänge von 1m waren die Ergebnisse im Rahmen des statistischen Fehlers gleich.

Durch diesen Vergleich ist sichergestellt, daß das Programm – zumindest im isotropen Fall – richtige Ergebnisse liefert. Der Vergleich von Messung und Simulation mit Licobix ist Gegenstand von Kapitel 4.

Kapitel 4

Lichtsammmlung in PbWO_4

4.1 Messung der Lichtausbeute für verschiedene Verpackungen

Ende 1997 wurden am Paul-Scherer-Institut (PSI) in Würenlingen (Schweiz) Messungen an einem PbWO_4 -Kristall durchgeführt. Es wurden Lichtausbeute und Uniformität für verschiedene Kristallverpackungen ermittelt [14]. Abbildung 4.1 zeigt ein Photo des Versuchsaufbaus. Der PbWO_4 -Kristall wurde in einem temperaturstabilisierten, abgedunkelten Kasten in eine Halterung eingebaut. Ein Protonenstrahl ($E = 80\text{MeV}$) traf seitlich auf den Kristall und erzeugte beim Durchgang Szintillationslicht, das von einem Photomultiplier detektiert wurde. Zwei vorgeschaltete Drahtkammern, die senkrecht zueinander ausgerichtet sind, dienten dabei zur Bestimmung des Auftrefforts der Protonen, so daß der Entstehungsort des gemessenen Szintillationslichts bekannt ist.

Die Messung wurde sowohl ohne Verpackung als auch mit verpackter Front- und/oder Seitenfläche durchgeführt. Als Verpackungsmaterialien wurden Tyvek und Mylar eingesetzt. Tyvek ist ein weißes Papier und somit ein diffuser Reflektor mit einer Reflektivität von 92%.¹ Mylar ist eine aluminisierte Kunststoffolie, die spiegelnd reflektiert. Die Seite mit der Aluminiumbeschichtung besitzt eine Reflektivität von 79%.²

Um eine möglichst gute Vergleichbarkeit der Messungen zu gewährleisten, wurde der Kristall beim Verpackungswechsel in der Halterung belassen, so daß der optische Kontakt zum Photomultiplier stets gleich blieb.³ Dadurch konnte die Verpackung

¹Diese Messung wurde in Rom durchgeführt

²Messergebnisse in Anhang B

³ Die Notwendigkeit erkennt man in Abbildung 4.2 beim Vergleich der beiden Messungen des

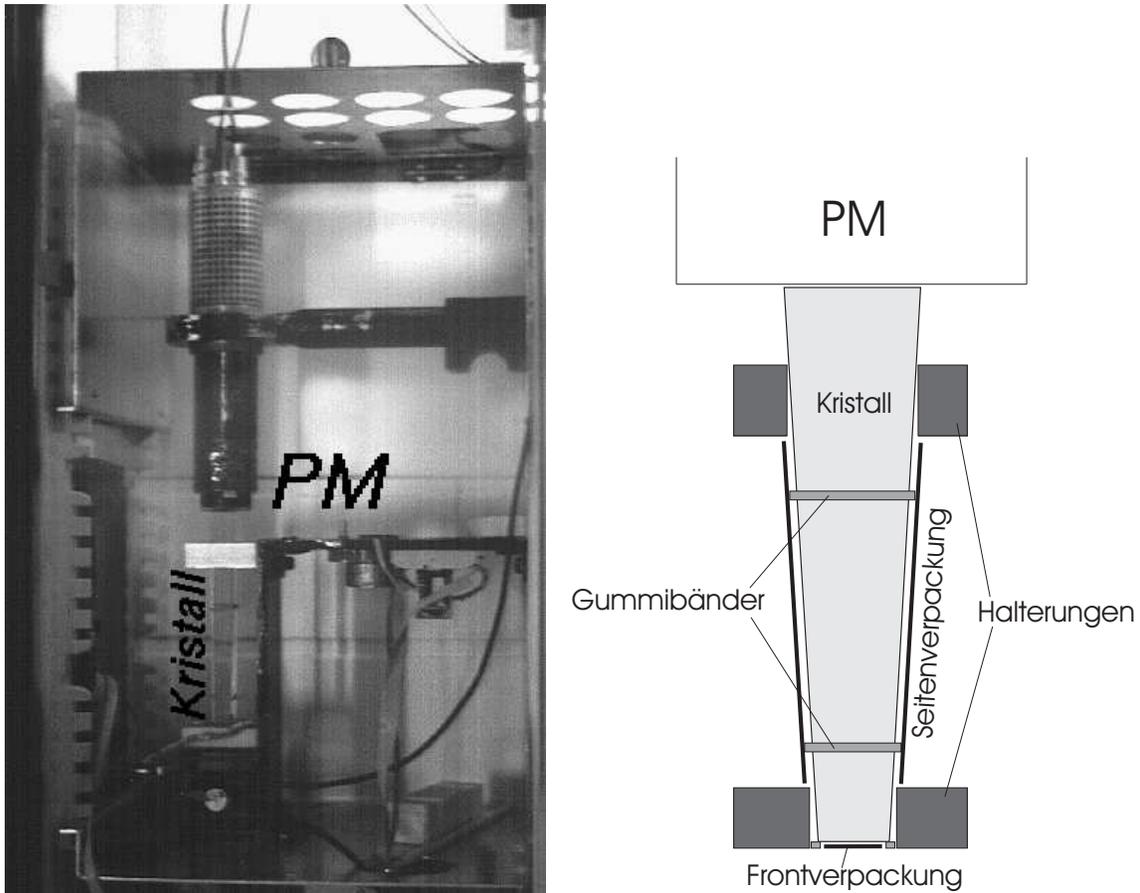


Abbildung 4.1: *Meßaufbau am PSI*

der Seiten nur zwischen den beiden Halterungen erfolgen.

Zunächst wurde der Kristall mit Front- und Seitenverpackung in der Halterung befestigt und die Lichtausbeute gemessen. Anschließend wurde die Frontverpackung unter dem Kristall herausgezogen und erneut gemessen, bevor die Seitenverpackung entfernt und die Frontverpackung wieder unter den Kristall geschoben wurden und so die Messung mit Frontverpackung durchgeführt werden konnte. Schließlich wurde die Frontverpackung wieder entfernt und der Kristall „nackt“ gemessen.

Abbildung 4.2 zeigt die Meßergebnisse, die mit Tyvek bzw. Mylarfolie ermittelt wurden.

unverpackten Kristalls, die etwas unterschiedlich sind, da der Kristall zwischen den Messungen aus der Halterung genommen werden mußte.

4.1. MESSUNG DER LICHTAUSBEUTE FÜR VERSCHIEDENE VERPACKUNGEN⁸³

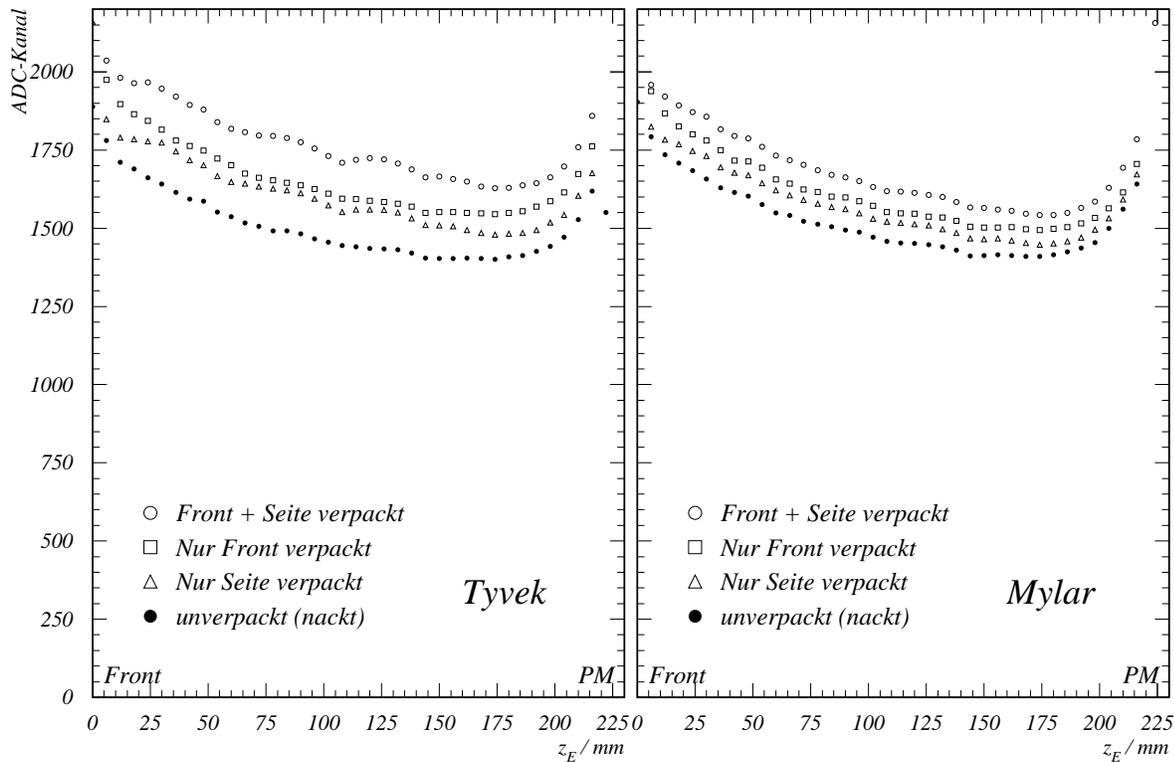


Abbildung 4.2: *Lichtsammung mit Tyvek- bzw. Mylarverpackung*

Dabei zeigte sich:

1. Der Fokussierungseffekt ist stets vorhanden
2. Kurz vor dem Photomultiplier steigt die Nachweiswahrscheinlichkeit wieder an
3. Die Erhöhung der Lichtausbeute durch Tyvek-Verpackung ist bei allen Verpackungsvarianten größer als die durch die Mylar-Verpackung. Der Gewinn beträgt:
 - Nur Front: etwa 9.5% bei Tyvek und 7% bei Mylar
 - Nur Seite: etwa 7% bei Tyvek und 4% bei Mylar
 - Front+Seite: etwa 18% bei Tyvek und 11.5% bei Mylar

Punkt 1 ist durch die Pyramidenstumpfform des Kristalls erklärbar. Der Winkel δ , der die Abweichung von der Quaderform angibt, beträgt etwa 0.4° .⁴

⁴Kristallabmessungen: Länge $L = 229.8\text{mm}$, Kantenlänge Rückfläche $R = 23.75\text{mm}$, Kantenlänge Frontfläche $F = 20.45\text{mm} \Rightarrow \delta = \arctan((R - F)/L)$

Da Absorption und Streuung dem Fokussierungseffekt entgegenwirken, müssen beide schwach sein. Dies bestätigt auch die Transmissionsmessung, die am CERN durchgeführt wurde. Die Ergebnisse sind in Anhang B zu sehen. Aus ihnen läßt sich abschätzen, daß die Absorptionslänge mindestens $3m$ beträgt

Daß auch die Volumenstreuung sehr gering war, konnte durch Durchleuchten des Kristalls mit einem Laser festgestellt werden. Im Gegensatz zu dem Kristall, der für die Photos in Kapitel 1 benutzt wurde, war der Strahlverlauf hier im Kristall nicht zu sehen, sehr wohl dagegen wieder die Auftreffpunkte auf der Kristalloberfläche, was auf Oberflächenstreuung schließen läßt.

Punkt 2 wird verständlich, wenn man die unvollständige Seitenverpackung und die Größe des Photomultipliers, die die der Kristallrückseite deutlich übertrifft, berücksichtigt. Abbildung 4.3 zeigt den Effekt: Licht, daß in der Nähe des Photomultipliers entsteht und den Kristall durch die Seitenfläche verläßt, kann trotzdem über den Luftweg in den Photomultiplier gelangen. Die obere Halterung und die Seitenverpackung verstärkt diesen Effekt zusätzlich: Licht, daß in größerer Entfernung vom Photomultiplier entsteht und seitlich tranmittiert wird, wird durch sie zurückreflektiert und kann dann oberhalb der Halterung den Kristall verlassen und wieder über den Luftweg den Photomultiplier treffen.

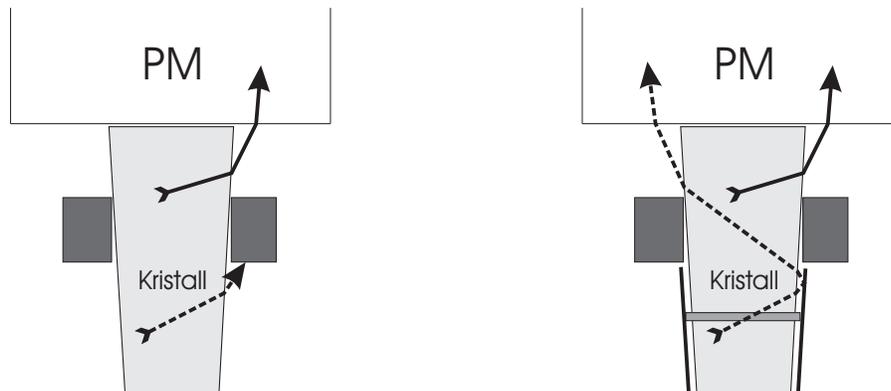


Abbildung 4.3: *Strahlen, die den Kristall seitlich verlassen, können auf dem Luftweg den Photomultiplier erreichen. Die Halterung und eine Seitenverpackung verstärken diesen Effekt.*

Punkt 3 (Verpackung mit Tyvek bringt höhere Lichtausbeute als mit Mylar) bestätigt zum einen die Erkenntnis aus der Simulation (Abschnitt 2.7), daß die Lichtausbeute nur vom Reflexionskoeffizient abhängt (Tyvek: 92%, Mylar: 79%), während die Art der Reflexion (diffus/spiegelnd) keinen Einfluß auf die Lichtsamm lung hat.

Andererseits verbarg sich hier eine interessante Frage: Daß die Frontverpackung einen Einfluß hat, war zu erwarten, wie in Abschnitt 2.7 gezeigt wurde. Wodurch kommt aber der starke Einfluß der Seitenverpackung zustande? In Abschnitt 2.7 wurde gezeigt, daß die Seitenverpackung nur dann Einfluß auf die Lichtsammlung hat, falls der Kristall doppelbrechend ist⁵ und/oder Streuung vorliegt.

4.2 Simulation der Messungen mit Licobix

Um die Frage zu klären, ob die Doppelbrechung allein den Effekt der Seitenverpackung erklären kann, wurde mit Hilfe von Licobix der Versuch sowohl ohne als auch mit Streuung simuliert.

Als Parameter wurden in die Simulation folgende Werte eingesetzt:

- Geometrischen Abmessungen des Kristalls aus der Kristall-Datenbank des CMS-ECAL-Projekts am CERN (Länge: 229.8mm, Kantenlänge Front: 20.45mm, Kantenlänge Rückfläche: 23.75mm)
- Brechungsindizes des Kristalls aus der Veröffentlichung in NIM [17] (Siehe Anhang B).
- optische Achse senkrecht zur Kristallängsachse
- Emissionsspektrum von Lanthan dotierten Kristallen (Anhang B, [18])
- Absorptionslänge: 3m
- Streuung zunächst vernachlässigt
- Brechungsindex des optischen Kitts und des Photomultipliers: $n = 1.5$

Das Ergebnis dieser Simulation ohne Streuung ist in Abbildung 4.4 zu sehen.

Man erkennt, daß sich die Simulationen für den unverpackten Kristall und den nur seitlich verpackten Kristall kaum unterscheiden. Die Messungen zeigen dagegen für den seitenverpackten Kristall eine um etwa 7% (Tyvek) bzw. 4% (Mylar) höhere Lichtausbeute.

Aus dieser schlechten Übereinstimmung von Messung und Simulation ergibt sich, daß die Doppelbrechung allein offenbar nicht in der Lage ist, den Einfluß der Seitenverpackung zu erklären.

⁵und die optische Achse möglichst senkrecht zur Kristallängsachse steht, was hier der Fall ist

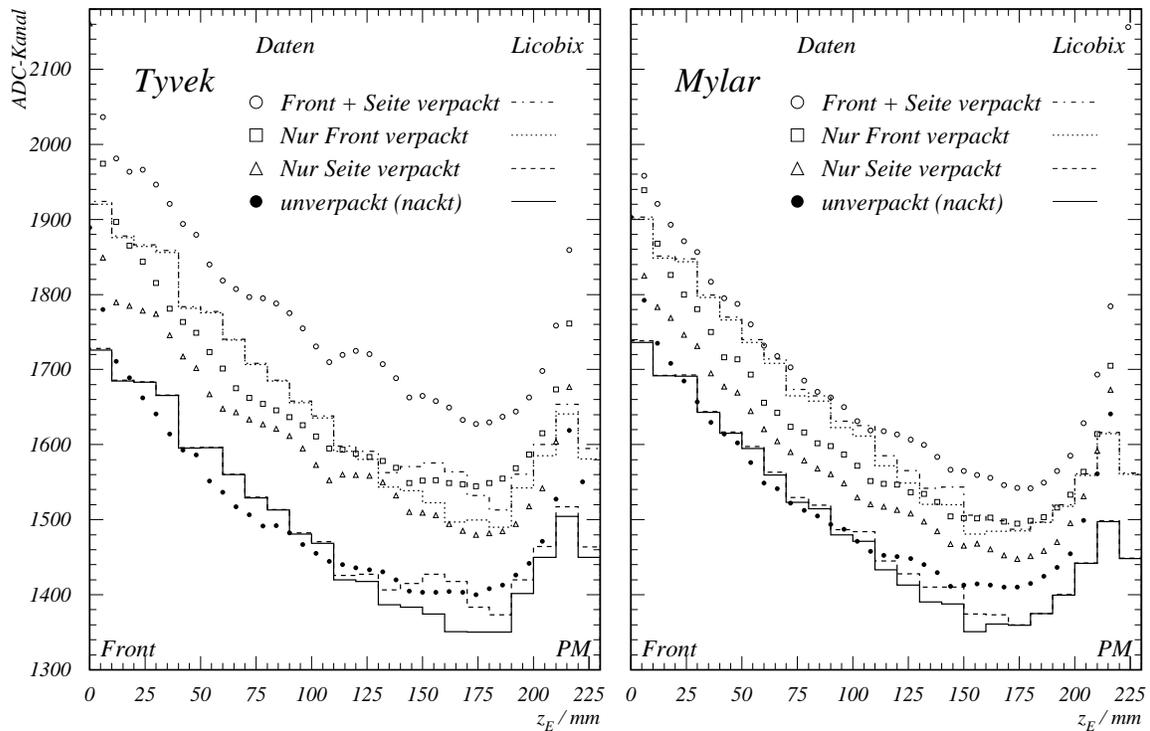


Abbildung 4.4: Vergleich Messung \leftrightarrow Simulation (ohne Streuung, nur Doppelbrechung)

Woran liegt der schwache Einfluß der Doppelbrechung?

Bei den Simulationen in Kapitel 2 wurde mit einem sehr stark doppelbrechenden Kristall gerechnet, bei dem außerdem die Absorption die mittlere freie Weglänge eines Strahls nicht einschränkte.

Die Doppelbrechung von PbWO_4 ist dagegen viel schwächer (siehe Anhang B) und zusätzlich begrenzt die Absorption die mittlere freie Weglänge eines Strahls.

Nun wurde zusätzlich Streuung in die Simulation mit aufgenommen. Wie schon unter Punkt 1 erläutert, ist hier wohl die Oberflächenstreuung dominant, während die Volumenstreuung eher gering ist. Daher wurde eine hohe Streulänge von 3m angenommen und eine Oberflächenstreuwahrscheinlichkeit von 1%.

Die Simulation stimmt hier schon deutlich besser mit der Messung überein, wie Abbildung 4.5 zeigt, auch wenn die Steigung der Kurve zu flach ausfällt und der Effekt der Seitenverpackung etwas zu schwach ist.

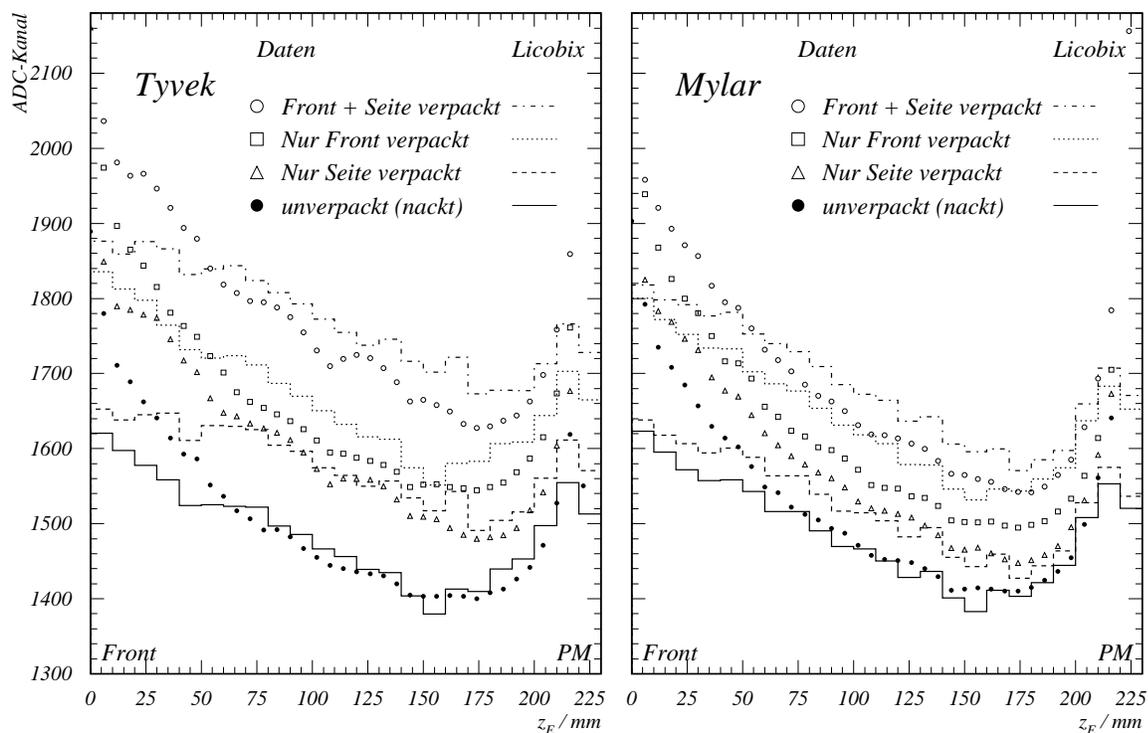


Abbildung 4.5: Vergleich Lichtsammlung \leftrightarrow Simulation mit Streuung ($\Lambda_S = 3m$, $p = 1\%$) und Absorption ($\Lambda_A = 3m$)

Um den Einfluß der Lage der optischen Achse zu ermitteln, wurde die Simulation nochmals mit den gleichen Parametern gestartet, lediglich die optische Achse lag diesmal parallel zur Kristalllängsachse.

Bei unveränderter Uniformität lag die Lichtausbeute in diesem Fall nur 0.8% unter dem Fall, in dem die optische Achse senkrecht zur Kristalllängsachse steht.

Der Vergleich mit einem isotropen Kristall ($n = 2.3$) ergibt ebenfalls fast das gleiche Bild: Die Lichtsammlung liegt bei unveränderter Uniformität nur 1.3% unter dem Wert, der mit Doppelbrechung erreicht wird.

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines Simulationsprogramms, mit dem die Auswirkungen der Doppelbrechung auf die Lichtsammlung untersucht werden können.

Voraussetzung dafür war, die theoretischen Grundlagen der Doppelbrechung in einer neuen Form herzuleiten, die – im Gegensatz zu den bekannten geometrischen Lösungswegen – für ein Simulationsprogramm verwendbar sind. Dazu wurde in Kapitel eins zunächst untersucht, wie sich elektromagnetische Wellen in optisch anisotropen Medien ausbreiten und wie sie sich an einer Grenzfläche zu einem isotropen Medium verhalten:

Dabei zeigte sich, daß für eine Welle mit vorgegebener Strahlrichtung nur zwei verschiedene, lineare Polarisierungen möglich sind. Diese beiden senkrecht zueinander polarisierten Wellen besitzen einen unterschiedlichen Brechungsindex. Es zeigte sich weiterhin, daß Strahlrichtung und Wellenvektor im anisotropen Medium nicht parallel sein müssen.

Neben diesen Ergebnissen, die in zahlreichen Lehrbüchern nachzulesen sind, ergaben sich aber auch einige überraschende und neue Erkenntnisse über das Verhalten an der Grenzfläche von anisotropem und isotropem Medium:

So kann ein Lichtstrahl nach der Reflexion an der Innenseite eines doppelbrechenden Kristalls in zwei reflektierte Strahlen aufspalten. Das Verhalten dieser beiden Strahlen in bezug auf Richtung und Intensität wurde ausführlich dargestellt.

Um die Auswirkungen der Doppelbrechung auf die Lichtsammlung verstehen zu können, wurden in Kapitel zwei zunächst die grundlegenden Prinzipien der Lichtsammlung erläutert. Um den Einfluß der Doppelbrechung zu klären, wurden die verschiedenen Einflüsse durch Lage der optischen Achse und Reflexionen an den unterschiedlichen Kristallflächen getrennt untersucht. Es zeigte sich, daß die Doppelbrechung in einem quaderförmigen Kristall die Lichtausbeute erhöht, ohne dabei die Uniformität der Lichtsammlung zu verändern. Je nach Lage der optischen Achse ist dieser Effekt mehr oder weniger stark von der Absorptionslänge abhängig.

Dies gilt auch in pyramidenstumpfförmigen Kristallen, solange der Winkel δ , der die Abweichung vom rechten Winkel der Quaderform angibt, so klein wie auch bei den PbWO_4 -Kristallen des elektromagnetischen Kalorimeters im CMS-Detektor ist.

In Kapitel drei wurde das Programm „Licobix“ vorgestellt, das Lichtsammlung auch in doppelbrechenden Kristallen simulieren kann und dessen Entwicklung Teil der Diplomarbeit war.

Im letzten Kapitel wurde die Frage geklärt, wie stark sich die Doppelbrechung von PbWO_4 auf die Lichtsammlung auswirkt. Dabei zeigte sich, daß die Doppelbrechung von PbWO_4 zu schwach ist, um einen signifikanten Einfluß auf die Lichtsammlung zu haben: Weder erhöht sich die Lichtausbeute merklich, noch ändert sich die Uniformität der Lichtausbeute.

Daher hat auch die Lage der optischen Achse keinen Einfluß auf die Lichtsammlung. Dies hat den großen Vorteil, daß beim Ziehen der Kristalle und der anschließenden Nachbearbeitung keine Rücksicht auf die Lage der optischen Achse genommen werden muß.

Die bisher ungeklärte Frage, ob der Einfluß der Seitenverpackung durch die Doppelbrechung und/oder Streuzentren im Kristall verursacht wird, konnte dahingehend beantwortet werden, daß der Einfluß nahezu ausschließlich durch Streuzentren zu erklären ist.

Mit dem Programm „Licobix“, das die Lichtsammlung auch in doppelbrechenden Medien mit einer Vielzahl von wählbaren Parametern simulieren kann, steht für zukünftige Fragen zur Lichtsammlung ein leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung.

Literaturverzeichnis

- [1] S. L. Glashow, *Partial Symmetry of Weak Interactions*, Nucl. Phys. 22 (1961) 579 3
- [2] A. Salam, *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Stockholm (1968) 367 3
- [3] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. 145 (1966) 1156 3
- [4] H. Fritzsche and M. Gell-Mann, 16th Int. Conf. on High Energy Physics, (Chicago 1972) 3
- [5] P. W. Higgs, Phys. Letters 12 (1964) 131, Phys. Rev. Letters 13 (1964) 508, Phys. Rev. 145 (1966) 1156 3
- [6] J. Mnich, *LEP Physics - An Overview*, Vortrag VI int. Symposium of Particles, Strings and Cosmology, Nort Eastern University, Boston (März 1998) 3
- [7] M. Schöntag, *Konzeption, Aufbau und Test eines elektromagnetischen Kalorimeters für Experimente am künftigen Large Hadron Collider LHC*, Dissertation, I. Physikalisches Institut RWTH-Aachen, PITHA 95/19 4
- [8] E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley, Reading 1974 4, 20
- [9] Bergmann-Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III Optik*, W. de Gruyter, Berlin 1974 4, 6
- [10] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über theoretische Physik, Band IV, Optik*, 1949 4, 6
- [11] M. Born, *Optik*, Springer, Berlin 1933 4
- [12] J.-Ph. Pérez, *Optik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1996 4, 11
- [13] F. Pockels, *Lehrbuch der Kristalloptik*, Teubner 1906 4

- [14] Th. Kirn, Dissertation, I. Phys. Inst. RWTH-Aachen, noch unveröffentlicht 51, 81
- [15] J. Schwenke, *Sammlung von Szintillationslicht in $PbWO_4$ -Kristallen*, Vortrag DPG Hamburg, März 1996 75
- [16] J. Schwenke, *Nachweis von Szintillationslicht aus BGO-Kristallen*, Diplomarbeit, I. Phys. Inst. RWTH-Aachen (1987) 75
- [17] S. Baccaro et al., *Ordinary and extraordinary complex refractive index of the lead tungstate ($PbWO_4$) crystal*, Nuclear Instruments and Methods A385 (1997) 209-214 20, 85, 106
- [18] Private Mitteilung von Etienne Auffray-Hillemanns 85, 106

Anhang A

Mathematische Herleitungen

A.1 $\vec{k} \cdot \vec{E}$

Voraussetzung:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_O & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_O & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{AO} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E} &= k_1 \frac{D_1}{\epsilon_o \epsilon_O} + k_2 \frac{D_2}{\epsilon_o \epsilon_O} + k_3 \frac{D_3}{\epsilon_o \epsilon_{AO}} \\ &= \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_O} (k_1 D_1 + k_2 D_2) + \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_{AO}} k_3 D_3 \\ &= \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_O} (\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{D}}_{=0} - k_3 D_3) + \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_{AO}} k_3 D_3 \\ &= \frac{1}{\epsilon_o} k_3 D_3 \left(\frac{1}{\epsilon_{AO}} - \frac{1}{\epsilon_O} \right) \quad | \quad D_3 = \epsilon_o \epsilon_{AO} E_3 \\ &= k_3 E_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \end{aligned}$$

A.2 Wellengleichung

Vorraussetzungen: wie bei A.1

$$\begin{aligned}
 & (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} - \vec{k}^2 \vec{E} = -\vec{k}^2 \frac{1}{n^2} \vec{\epsilon} \vec{E} \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k}}_{\text{siehe A.1}} - \vec{k}^2 (\vec{E} - \frac{1}{n^2} \vec{\epsilon} \vec{E}) = 0
 \end{aligned}$$

Komponentenschreibweise, $i=1 \dots 3$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & k_3 E_3 (1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}) k_i - \vec{k}^2 (E_i - \frac{1}{n^2} \epsilon_{ii} E_i) = 0 \\
 \Leftrightarrow & k_i k_3 E_3 (1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}) + E_i \vec{k}^2 (\frac{\epsilon_{ii}}{n^2} - 1) = 0
 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{k}^2 (\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1) & 0 & k_1 k_3 (1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}) \\ 0 & \vec{k}^2 (\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1) & k_2 k_3 (1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}) \\ 0 & 0 & \vec{k}^2 (\frac{\epsilon_{AO}}{n^2} - 1) + k_3^2 (1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O}) \end{pmatrix} \cdot \vec{E} = \vec{0}$$

Eine nichttriviale Lösung dieses homogenen, linearen Gleichungssystem existiert nur für den Fall, daß die Determinante verschwindet:

$$\begin{aligned}
 & \vec{k}^2 (\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1) \cdot \vec{k}^2 (\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1) \cdot [\vec{k}^2 (\frac{\epsilon_{AO}}{n^2} - 1) + k_3^2 (1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O})] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \vec{k}^4 \cdot (\frac{\epsilon_O}{n^2} - 1)^2 \cdot [k^2 \frac{\epsilon_{AO}}{n^2} - \vec{k}^2 + k_3^2 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} k_3^2] = 0 \quad | \cdot n^6 \neq 0 \\
 \Leftrightarrow & \vec{k}^4 \cdot (\epsilon_O - n^2)^2 \cdot [n^2 (-\vec{k}^2 + k_3^2 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} k_3^2) + \epsilon_{AO} \vec{k}^2] = 0 \quad | \cdot \epsilon_O \neq 0 \\
 \Leftrightarrow & \vec{k}^4 \cdot (\epsilon_O - n^2)^2 \cdot [n^2 (\underbrace{-\vec{k}^2 + k_3^2}_{=-k_1^2 - k_2^2}) - \epsilon_{AO} k_3^2 + \epsilon_{AO} \epsilon_O \vec{k}^2] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \vec{k}^4 \cdot (\epsilon_O - n^2)^2 \cdot [n^2 (\underbrace{-\epsilon_O k_1^2 - \epsilon_O k_2^2 - \epsilon_{AO} k_3^2}_{=-(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}) + \epsilon_{AO} \epsilon_O \vec{k}^2] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \vec{k}^4 \cdot (\epsilon_O - n^2)^2 \cdot [-n^2 (\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k} + \epsilon_{AO} \epsilon_O \vec{k}^2] = 0 \quad | / (\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k} \\
 \Leftrightarrow & \vec{k}^4 \cdot (\epsilon_O - n^2)^2 \cdot [\frac{\epsilon_{AO} \epsilon_O \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}} - n^2] = 0 \\
 \Leftrightarrow & \vec{k} = \vec{0} \quad \vee \quad n^2 = \epsilon_O \quad \vee \quad n^2 = \frac{\epsilon_{AO} \epsilon_O \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}
 \end{aligned}$$

A.3 Ordentliche Lösung

Vorraussetzungen: wie bei A.1

$n^2 = \epsilon_O$ wird in die Wellengleichungsmatrix eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_O}{\epsilon_O} - 1 \right) & 0 & k_1 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_O}{\epsilon_O} - 1 \right) & k_2 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & 0 & \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} - 1 \right) + k_3^2 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \end{pmatrix} \cdot \vec{E} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & 0 & k_2 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & 0 & (k_3^2 - \vec{k}^2) \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \end{pmatrix} \cdot \vec{E} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & E_3 = 0 \quad \vee \quad \begin{pmatrix} k_1 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ k_2 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ (k_3^2 - \vec{k}^2) \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & E_3 = 0 \quad \vee \quad \epsilon_{AO} = \epsilon_O \quad \vee \quad \begin{pmatrix} k_1 k_3 \\ k_2 k_3 \\ (k_3^2 - \vec{k}^2) \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & E_3 = 0 \quad \vee \quad \epsilon_{AO} = \epsilon_O \quad \vee \quad \vec{k} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{k} = k_3 \end{aligned}$$

Die Lösungen bedeuten:

- $E_3 = 0$: Das elektrische Feld hat keine Komponente in Richtung der optischen Achse
- $\epsilon_{AO} = \epsilon_O$: Es liegt keine Doppelbrechung vor
- $\vec{k} = \vec{0}$: Unendliche Wellenlänge, d.h. elektrostatischer Fall
- $\vec{k} = k_3$: Wellennormale parallel zur optischen Achse: Die Doppelbrechung ist entartet

Falls $\vec{k} = k_3$ gilt, ist die Bedingung $E_3 = 0$ automatisch erfüllt:

$$\vec{k} = k_3 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{D}}_{=0} = k_3 \cdot D_3 \quad \Rightarrow \quad D_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_3 = \epsilon_O \epsilon_{AO} D_3 = 0$$

A.4 Außerordentliche Lösung

Vorraussetzungen: wie bei A.1

$$n^2 = \frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}$$

wird in die Wellengleichungsmatrix eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_O (\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2} - 1 \right) & 0 & k_1 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_O (\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2} - 1 \right) & k_2 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & 0 & \vec{k}^2 \left(\frac{\epsilon_{AO} (\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2} - 1 \right) + k_3^2 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \end{pmatrix} \cdot \vec{E} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_{AO}} - \vec{k}^2 & 0 & k_1 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_{AO}} - \vec{k}^2 & k_2 k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \\ 0 & 0 & \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_O} - \vec{k}^2 + k_3^2 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \end{pmatrix} \cdot \vec{E} = \vec{0}$$

Dritte Komponente der Gleichung:

$$\left[\frac{\epsilon_O k_1^2 + \epsilon_O k_2^2 + \epsilon_{AO} k_3^2}{\epsilon_O} - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) + k_3^2 - k_3^2 \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right] \cdot E_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \cdot E_3 = 0$$

\Rightarrow Keine Einschränkung bei der Wahl von E_3 und $D_3 = \epsilon_O \epsilon_{AO} E_3$.

Erste und zweite Komponente der Gleichung ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\epsilon_{AO}} (\epsilon_O k_1^2 + \epsilon_O k_2^2 + \epsilon_{AO} k_3^2) - \vec{k}^2 \right] \cdot E_i + \left[k_i k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \right] \cdot E_3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{\epsilon_O}{\epsilon_{AO}} (k_1^2 + k_2^2) + \underbrace{k_3^2 - \vec{k}^2}_{=-k_1^2 - k_2^2} \right] \cdot E_i + \left[k_i k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \right] \cdot E_3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\left(\frac{\epsilon_O}{\epsilon_{AO}} - 1 \right) (k_1^2 + k_2^2) \right] \cdot E_i + \left[k_i k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \right] \cdot E_3 = 0 \quad | \quad E_i = \frac{D_i}{\epsilon_O \epsilon_{ii}} \\ \Leftrightarrow & \left[\left(\frac{\epsilon_O}{\epsilon_{AO}} - 1 \right) (k_1^2 + k_2^2) \right] \cdot \frac{D_i}{\epsilon_O \epsilon_{ii}} + \left[k_i k_3 \left(1 - \frac{\epsilon_{AO}}{\epsilon_O} \right) \right] \cdot \frac{D_3}{\epsilon_O \epsilon_{AO}} = 0 \quad | \quad / \epsilon_O \\ \Leftrightarrow & \left[\left(\frac{1}{\epsilon_{AO}} - \frac{1}{\epsilon_O} \right) (k_1^2 + k_2^2) \right] \cdot D_i + \left[k_i k_3 \left(\frac{1}{\epsilon_{AO}} - \frac{1}{\epsilon_O} \right) \right] \cdot D_3 = 0 \quad | \quad / \left(\frac{1}{\epsilon_{AO}} - \frac{1}{\epsilon_O} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_O = \epsilon_{AO} \quad \vee \quad [k_1^2 + k_2^2] \cdot D_i + [k_i k_3] \cdot D_3 = 0 \quad | \quad k_3 D_3 = -k_1 D_1 - k_2 D_2$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_O = \epsilon_{AO} \quad \vee \quad [k_1^2 + k_2^2] \cdot D_i - k_i k_1 D_1 - k_i k_2 D_2 = 0$$

Für die Komponenten 1 und 2 bedeutet dies:

$$i = 1 : \quad D_1 k_2^2 - k_1 k_2 D_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_2 (D_1 k_2 - D_2 k_1) = 0$$

$$i = 2 : \quad D_2 k_1^2 - k_1 k_2 D_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 (D_1 k_2 - D_2 k_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_O = \epsilon_{AO} \quad \vee \quad (k_1 = 0 \wedge k_2 = 0) \quad \vee \quad D_1 k_2 - D_2 k_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_O = \epsilon_{AO} \quad \vee \quad \vec{k} = k_3 \quad \vee \quad \vec{k} = \vec{0} \quad \vee \quad D_1 k_2 - D_2 k_1 = 0$$

Mit der Definition der Flächennormalen des Hauptschnitts läßt sich der letzte Ausdruck anders formulieren:

$$\vec{HS} := \vec{k} \times \vec{OA} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{D} \cdot \vec{HS} = D_1 k_2 - D_2 k_1 = 0$$

Damit muß eine der Lösungsbedingungen erfüllt sein:

- $\epsilon_O = \epsilon_{AO}$: Keine Doppelbrechung
- $\vec{k} = k_3 \parallel \vec{OA}$: Doppelbrechung entartet
- $\vec{k} = \vec{0}$: Keine Welle, elektrostatisch
- $\vec{D} \cdot \vec{HS} = 0$: \vec{D} schwingt in der Ebene des Hauptschnitts

A.5 Ausbreitungsrichtung der Welle

Vorraussetzungen: wie bei A.1

$$\begin{aligned}
\vec{S} &\parallel \left[\vec{\epsilon}^{-1} ((\vec{k} \times \vec{OA}) \times \vec{k}) \right] \times [\vec{k} \times \vec{OA}] \\
&= \left[\vec{\epsilon}^{-1} \left(\left(\left(\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \vec{k} \right) \right) \right] \times \left[\left(\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] \\
&= \left[\vec{\epsilon}^{-1} \left(\left(\begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \right) \right) \right] \times \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\vec{\epsilon}^{-1} \begin{pmatrix} -k_1 k_3 \\ -k_2 k_3 \\ k_2^2 + k_1^2 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k_1 k_3 / \epsilon_O \\ -k_2 k_3 / \epsilon_O \\ k_2^2 + k_1^2 / \epsilon_{AO} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_1(k_1^2 + k_2^2) / \epsilon_{AO} \\ k_2(k_1^2 + k_2^2) / \epsilon_{AO} \\ k_3(k_1^2 + k_2^2) / \epsilon_O \end{pmatrix} \\
&= \epsilon_O \epsilon_{AO} (k_1^2 + k_2^2) \begin{pmatrix} k_1 \epsilon_O \\ k_2 \epsilon_O \\ k_3 \epsilon_{AO} \end{pmatrix} \\
&= \epsilon_O \epsilon_{AO} (k_1^2 + k_2^2) \vec{\epsilon} \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{S} \parallel \vec{\epsilon} \vec{k} \quad \Leftrightarrow \vec{\epsilon}^{-1} \vec{S} \parallel \vec{\epsilon}^{-1} \vec{\epsilon} \vec{k} \quad \Leftrightarrow \vec{k} \parallel \vec{\epsilon}^{-1} \vec{S}$$

A.6 Brechungs- und Reflexionsgesetz

Vorraussetzungen:

$$\text{Flächennormale } \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad k_2 = 0$$

Ansatz:

$$\frac{|\vec{k}|}{n} = \frac{|\vec{k}'|}{n'} \Leftrightarrow \frac{\vec{k}^2}{n^2} = \frac{\vec{k}'^2}{n'^2}, \quad k_1 = k'_1, \quad k_2 = k'_2 (= 0)$$

Gesucht:

$$k_3$$

1. ordentlich (k) \rightarrow ordentlich (k')

$$\frac{k_1^2 + k_3^2}{n^2} = \frac{k_1'^2 + k_3'^2}{n'^2} \Rightarrow k_3' = \pm \sqrt{n'^2 \frac{k_1^2 + k_3^2}{n^2} - k_1'^2} = \pm \sqrt{n'^2 \frac{\vec{k}^2}{n^2} - k_1'^2}$$

2. außerordentlich (k) \rightarrow ordentlich (k')

Für n wird $n_{AO} = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}}$ eingesetzt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_3' &= \pm \sqrt{n'^2 \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}^2}{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2} - k_1'^2} \\ k_3' &= \pm \sqrt{n'^2 \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_O \epsilon_{AO}} - k_1'^2} \end{aligned}$$

3. ordentlich (k) \rightarrow außerordentlich (k')

$$\begin{aligned}
& \frac{k_1^2 + k_3^2}{n^2} = \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}') \vec{k}'}{\epsilon_O \epsilon_{AO}} \\
\Leftrightarrow & \frac{k_1^2 + k_3^2}{n^2} = \frac{\epsilon_{11} k_1^2 + 2\epsilon_{13} k_1 k_3' + \epsilon_{33} k_3'^2}{\epsilon_O \epsilon_{AO}} \\
\Leftrightarrow & \frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{n^2 \epsilon_{33}} \vec{k}^2 - \frac{\epsilon_{11} k_1^2}{\epsilon_{33}} = \frac{2\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1 k_3 + k_3^2 \\
\Leftrightarrow & \frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{n^2 \epsilon_{33}} \vec{k}^2 - \frac{\epsilon_{11} k_1^2}{\epsilon_{33}} = \left(k_3 + \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 - \left(\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 \\
\Leftrightarrow & \left(k_3 + \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 = \frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{n^2 \epsilon_{33}} \vec{k}^2 - \frac{\epsilon_{11} k_1^2}{\epsilon_{33}} + \left(\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 \\
\Leftrightarrow & k_3 = -\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1 \pm \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{n^2 \epsilon_{33}} \vec{k}^2 - \frac{\epsilon_{11} k_1^2}{\epsilon_{33}} + \left(\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2} \\
\Leftrightarrow & k_3 = \frac{1}{\epsilon_{33}} \left(-\epsilon_{13} k_1 \pm \sqrt{\epsilon_O \epsilon_{AO} \epsilon_{33} \frac{\vec{k}^2}{n^2} - \epsilon_{11} \epsilon_{33} k_1^2 + \epsilon_{13}^2 k_1^2}\right) \\
\Leftrightarrow & k_3 = \frac{1}{\epsilon_{33}} \left(-\epsilon_{13} k_1 \pm \sqrt{\epsilon_O \epsilon_{AO} \epsilon_{33} \frac{\vec{k}^2}{n^2} + k_1^2 (\epsilon_{13}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{33})}\right)
\end{aligned}$$

4. außerordentlich (k) \rightarrow außerordentlich (k')

$$\begin{aligned}
& \frac{\vec{k}'^2}{n^2} = \frac{\vec{k}^2}{n^2} \\
\Leftrightarrow & \vec{k}'^2 \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}') \vec{k}'}{\epsilon_O \epsilon_{AO} k'^2} = \vec{k}^2 \frac{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}{\epsilon_O \epsilon_{AO} k^2} \\
\Leftrightarrow & (\vec{\epsilon} \vec{k}') \vec{k}' = (\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k} \\
\Leftrightarrow & \epsilon_{11} k_1'^2 + 2\epsilon_{13} k_1 k_3' + \epsilon_{33} k_3'^2 = \epsilon_{11} k_1^2 + 2\epsilon_{13} k_1 k_3 + \epsilon_{33} k_3^2 \\
\Leftrightarrow & k_3'^2 + 2\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1 k_3' = k_3^2 + 2\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1 k_3 \\
\Leftrightarrow & \left(k_3' + \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 - \left(\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 = \left(k_3 + \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 - \left(\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right)^2 \\
\Leftrightarrow & k_3' + \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1 = \pm \left(k_3 + \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1\right) \quad | \text{ Reflexion: neg. Vorzeichen} \\
\Leftrightarrow & k_3' = -k_3 - 2\frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} k_1
\end{aligned}$$

A.7 Gemittelter Brechungsindex

Sei ϑ der Winkel zwischen optischer Achse $\vec{OA} = (0, 0, 1)$ und \vec{k}

$$\begin{aligned} n_{AO} &= \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{(\vec{\epsilon} \vec{k}) \vec{k}}} = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO} \vec{k}^2}{\epsilon_O k_1^2 + \epsilon_O k_2^2 + \epsilon_{AO} k_3^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{\epsilon_O \frac{k_1^2 + k_2^2}{k^2} + \epsilon_{AO} \frac{k_3^2}{k^2}}} = \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{\epsilon_O \sin^2(\vartheta) + \epsilon_{AO} \cos^2(\vartheta)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \bar{n}_{AO} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi n_{AO}(\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{\frac{\epsilon_O \epsilon_{AO}}{\epsilon_O \sin^2(\vartheta) + \epsilon_{AO} \cos^2(\vartheta)}} \sin(\vartheta) d\vartheta \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_O \epsilon_{AO}}}{2} \int_{+1}^{-1} \frac{-d(\cos \vartheta)}{\sqrt{\epsilon_O \sin^2(\vartheta) + \epsilon_{AO} \cos^2(\vartheta)}} \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_O \epsilon_{AO}}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \vartheta)}{\sqrt{\epsilon_O (1 - \cos^2(\vartheta)) + \epsilon_{AO} \cos^2(\vartheta)}} \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_O \epsilon_{AO}}}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \vartheta)}{\sqrt{\cos^2(\vartheta)(\epsilon_{AO} - \epsilon_O) + \epsilon_O}} \end{aligned}$$

Lösung des Integrals:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{s x^2 + r}} &= \frac{\ln(\sqrt{s} x + \sqrt{s x^2 + r})}{\sqrt{s}} \\ \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 s + r}} &= \frac{\ln(\sqrt{s} + \sqrt{s + r})}{\sqrt{s}} - \frac{\ln(-\sqrt{s} + \sqrt{s + r})}{\sqrt{s}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}} \ln \left(\frac{\sqrt{s + r} + \sqrt{s}}{\sqrt{s + r} - \sqrt{s}} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{n}_{AO} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_{AO} \cdot \epsilon_O}{\epsilon_{AO} - \epsilon_O}} \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon_{AO}} + \sqrt{\epsilon_{AO} - \epsilon_O}}{\sqrt{\epsilon_{AO}} - \sqrt{\epsilon_{AO} - \epsilon_O}} \right)$$

A.8 Reflexions- / Transmissionskoeffizienten

Voraussetzungen: wie A.6

$$\Rightarrow k_{i1} = k_{O1} = k_{AO1} = k_{t1} =: k_1 \quad \wedge \quad k_{i2} = k_{O2} = k_{AO2} = k_{t2} = 0$$

\vec{H}_{tang} kann auf zwei Arten berechnet werden:

(1) vierte Maxwellgleichung

$$\vec{H}_t = \frac{1}{\mu_o \omega} [\vec{k}_t \times \vec{E}_t] = \frac{1}{\mu_o \omega} \left[\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ k_{t3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^* \\ E_{i2} + A_O E_{O2}^* + A_{AO} E_{AO2}^* \\ -\frac{k_1}{k_{t3}} (E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow H_{t1} = \frac{1}{\mu_o \omega} [-k_{t3} \cdot (E_{i2} + A_O E_{O2}^* + A_{AO} E_{AO2}^*)]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_{t2} &= \frac{1}{\mu_o \omega} \left[k_1 \cdot \frac{k_1}{k_{t3}} (E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) + k_{t3} \cdot (E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) \right] \\ &= \frac{1}{\mu_o \omega} \left(\frac{k_1^2}{k_{t3}} + k_{t3} \right) \cdot (E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) \\ &= \frac{1}{\mu_o \omega} \left(\frac{\vec{k}_t^2}{k_{t3}} \right) \cdot (E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) \end{aligned}$$

(2) Stetigkeitsbedingung für H_{tang}

$$\vec{H}_{t1,2} = [\vec{H}_i + \vec{H}_O + \vec{H}_{AO}]_{1,2} = \frac{1}{\mu_o \omega} [(\vec{k}_i \times \vec{E}_i) + A_O (\vec{k}_O \times \vec{E}_O^*) + A_{AO} (\vec{k}_{AO} \times \vec{E}_{AO}^*)]_{1,2}$$

$$\Rightarrow H_{t1} = \frac{1}{\mu_o \omega} [-k_{i3} E_{i2} - A_O k_{O3} E_{O2}^* - A_{AO} k_{AO3} E_{AO2}^*]$$

$$\Rightarrow H_{t2} = \frac{1}{\mu_o \omega} [k_{i3} E_{i1} - k_1 E_{i3} + A_O (k_{O3} E_{O3}^* - k_1 E_{O1}^*) + A_{AO} (k_{AO3} E_{AO1}^* - k_1 E_{AO3}^*)]$$

Gleichsetzen der zwei Gleichungen für H_1 und Auflösen nach A_O liefert:

$$\begin{aligned}
[-k_{t3} \cdot (E_{i2} + A_O E_{O2}^* + A_{AO} E_{AO2}^*)] &= [-k_{i3} E_{i2} - A_O k_{O3} E_{O2}^* - A_{AO} k_{AO3} E_{AO2}^*] \\
\Leftrightarrow A_O (-k_{t3} E_{O2}^* + k_{O3} E_{O2}^*) &= A_{AO} (k_{t3} E_{AO2}^* - k_{AO3} E_{AO2}^*) + (k_{t3} E_{i2} - k_{i3} E_{i2}) \\
\Leftrightarrow A_O &= \frac{A_{AO} \overbrace{E_{AO2}^* (k_{t3} - k_{AO3})}^{=:a} + \overbrace{E_{i2} (k_{t3} - k_{i3})}^{=:b}}{\underbrace{E_{O2}^* (-k_{t3} + k_{O3})}_{=:c}} \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

Gleichsetzen der zwei Gleichungen für H_2 und Auflösen nach A_O liefert:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{k}_t^2 \\ k_{t3} \end{pmatrix}}_{=:K} \cdot (E_{i1} + A_O E_{O1}^* + A_{AO} E_{AO1}^*) &= \\
& [k_{i3} E_{i1} - k_1 E_{i3} + A_O (k_{O3} E_{O3}^* - k_1 E_{O1}^*) + A_{AO} (k_{AO3} E_{AO1}^* - k_1 E_{AO3}^*)] \\
\Leftrightarrow A_O (K E_{O1}^* - k_{O3} E_{O1}^* + k_1 E_{O3}^*) &= \\
& A_{AO} (-K E_{AO1}^* + k_{AO3} E_{AO1}^* - k_1 E_{AO3}^*) + (-K E_{i1} + k_{i3} E_{i1} - k_1 E_{i3}) \\
\Leftrightarrow A_O &= \frac{A_{AO} (-K E_{AO1}^* + k_{AO3} E_{AO1}^* - k_1 E_{AO3}^*) + (-K E_{i1} + k_{i3} E_{i1} - k_1 E_{i3})}{(K E_{O1}^* - k_{O3} E_{O1}^* + k_1 E_{O3}^*)} \Big| K = \frac{\vec{k}_t^2}{k_{t3}} \\
&= \frac{A_{AO} (-\vec{k}_t^2 E_{AO1}^* + k_{AO3} k_{t3} E_{AO1}^* - k_1 k_{t3} E_{AO3}^*) + (-\vec{k}_t^2 E_{i1} + k_{i3} k_{t3} E_{i1} - k_1 k_{t3} E_{i3})}{(\vec{k}_t^2 E_{O1}^* - k_{O3} k_{t3} E_{O1}^* + k_1 k_{t3} E_{O3}^*)} \\
&= \frac{A_{AO} \left(\overbrace{E_{AO1}^* (k_{AO3} k_{t3} - \vec{k}_t^2)}^{=:d} - E_{AO3}^* k_1 k_{t3} \right) + \overbrace{E_{i1} (k_{i3} k_{t3} - \vec{k}_t^2)}^{=:e} - E_{i3} k_1 k_{t3}}}{\underbrace{E_{O1}^* (-k_{O3} k_{t3} + \vec{k}_t^2) + E_{O3}^* k_1 k_{t3}}_{=:f}} \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert ein Ausdruck der Form:

$$\frac{a \cdot A_{AO} + b}{c} = \frac{d \cdot A_{AO} + e}{f} \quad \Leftrightarrow \quad f(a \cdot A_{AO} + b) = c(d \cdot A_{AO} + e) \quad \Leftrightarrow$$

$$A_{AO}(fa - cd) = ce - fb \quad \Leftrightarrow \quad A_{AO} = \frac{ce - fb}{fa - cd}$$

$$\begin{aligned}
A_{AO} = & \frac{[E_{O2}^*(-k_{t3} + k_{O3})] \cdot [E_{i1}(k_{i3}k_{t3} - \vec{k}_t^2) - E_{i3}k_1k_{t3}] - \dots}{[E_{O1}^*(-k_{O3}k_{t3} + \vec{k}_t^2) + E_{O3}^*k_1k_{t3}] \cdot [E_{AO2}^*(k_{t3} - k_{AO3})] - \dots} \\
& \dots \frac{[E_{O1}^*(-k_{O3}k_{t3} + \vec{k}_t^2) + E_{O3}^*k_1k_{t3}] \cdot [E_{i2}(k_{t3} - k_{i3})]}{[E_{O2}^*(-k_{t3} + k_{O3})] \cdot [(E_{AO1}^*(k_{AO3}k_{t3} - \vec{k}_t^2) - E_{AO3}^*k_1k_{t3})]}
\end{aligned}$$

A.9 Flächentreue Projektion

Flächeninhalt in der Ebene:

$$dA_w = r dr d\varphi$$

Flächeninhalt auf der Einheitskugel:

$$dA_\Omega = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

Fläche bleibt bei der Projektion gleich:

$$dA_w = dA_\Omega$$

$$\Leftrightarrow r dr d\varphi = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

$$\Leftrightarrow r dr = \sin(\vartheta) d\vartheta$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R r dr = \int_0^\theta \sin(\vartheta) d\vartheta$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R = [-\cos(\vartheta)]_0^\theta$$

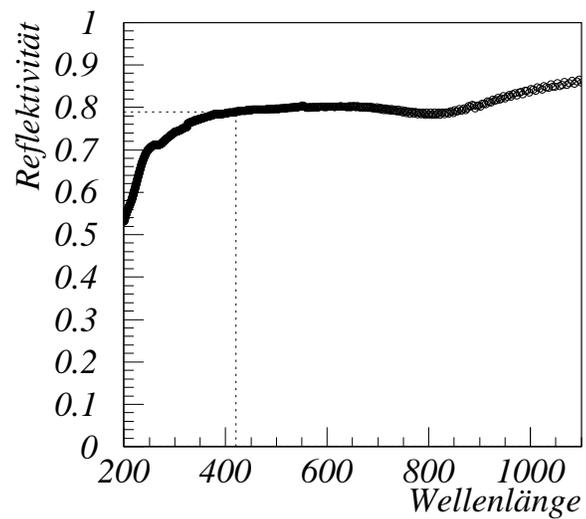
$$\Leftrightarrow R = \sqrt{2(1 - \cos(\theta))}$$

Anhang B

Simulationsparameter

Reflektivität von Mylarfolie

Die Messung der Reflektivität erfolgte mit einem Perkin-Elmer Spektrometer:



Das Maximum des Emissionsspektrums liegt bei 420nm. Die Reflektivität beträgt dort $R = 79\% \pm 2\%$.

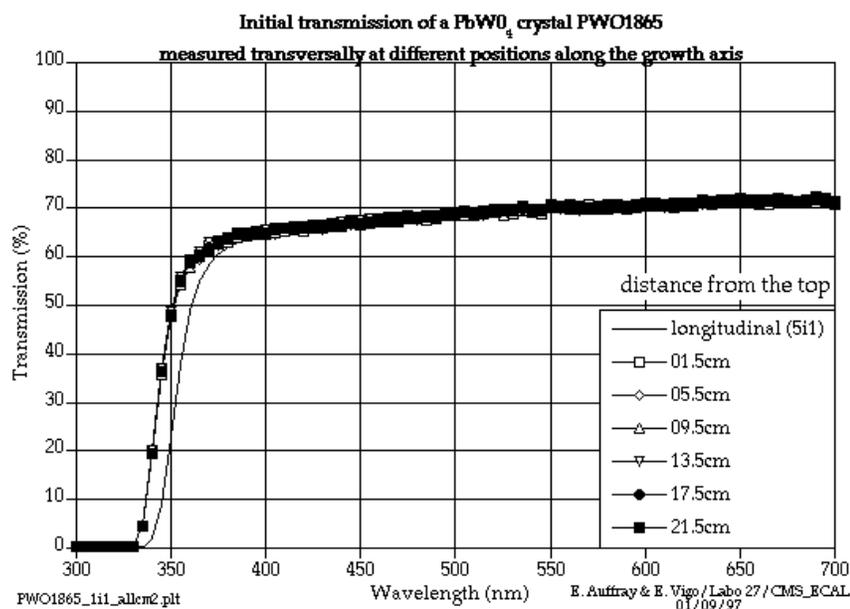
Transmission von PbWO_4 

Abbildung B.1: *Transmission des verwendeten PbWO_4 -Kristalls*

Abbildung B.1 zeigt den spektralen Verlauf der Transmission des benutzten Kristalls Nr. 1865 sowohl in Längs- als auch in Querrichtung (T_L, T_Q). Der Kristall besitzt die Länge L und die Dicke D . Daraus läßt sich die Absorptionslänge Λ_A abschätzen:

$$\frac{T_L}{T_Q} \approx e^{-\frac{L-D}{\Lambda_A}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_A \approx \frac{L-D}{\ln\left(\frac{T_Q}{T_L}\right)}$$

Die Transmission in Querrichtung (T_Q) wurde an mehreren Stellen gemessen, bleibt dabei aber im Rahmen der Meßgenauigkeit konstant. Da die Kristalldicke hierbei variiert, wird für D der Mittelwert von 22mm angenommen.

Im Bereich der Emissionswellenlängen um 420nm ist die Kurve von transversaler und longitudinaler Transmission nicht mehr zu trennen. Damit liegt der longitudinale Transmissionswerte maximal 4% unter dem transversalen: $T_L \approx 62\%$, $T_Q \approx 66\%$

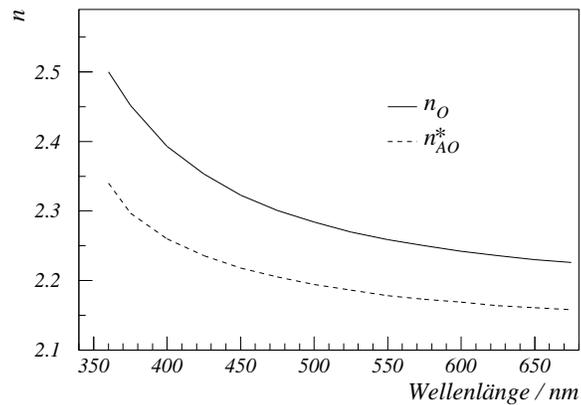
$$\Lambda_{Abs} \approx \frac{(230 - 22)\text{mm}}{\ln\left(\frac{66\%}{62\%}\right)} > 3\text{m}$$

Brechungsindizes von PbWO_4

Die komplexen Brechungsindizes wurden in NIM [17] für zwei quaderförmige PbWO_4 -Kristalle (La bzw. Nb dotiert, $20 \times 20 \times 200 \text{mm}^3$) bestimmt.

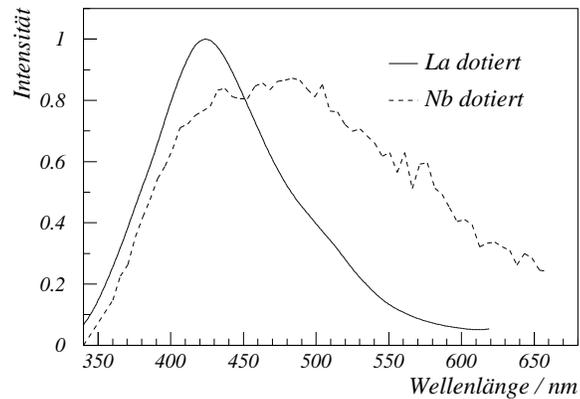
Dazu wurde ein Laserstrahl längs durch den Kristall geschickt. Durch Messung von Reflexion und Transmission sowie der Stärke der Strahlaufspaltung konnten die komplexen Brechungsindizes bestimmt werden.

Da der imaginäre Anteil (Absorption) für die beiden Kristalle stark unterschiedlich war und sich die Kristallqualität seither verbessert hat, wurde nur der Realteil der Messung als Simulationsparameter übernommen.



Emissionsspektrum von PbWO_4 (La bzw. Nb dotiert)

Nach [18] sehen die beiden Spektren folgendermaßen aus :



Anhang C

Programmanleitung Licobix

Die einzelnen Parameter müssen in einer Konfigurationsdatei abgespeichert werden, die die Dateierweiterung „.conf“ besitzen muß. Pro Zeile kann ein Parameter übergeben werden. Die Zeile beginnt mit einem Schlüsselwort, wobei die Groß-/Kleinschreibung keine Rolle spielt, gefolgt von dem Wert, den der entsprechende Parameter annehmen soll. Kommentarzeilen müssen mit „C “ beginnen und werden nicht berücksichtigt. Die Datei muß mit einer Zeile, in der nur „end“ steht, abgeschlossen werden.

Alle Längenangaben sind in mm, alle Wahrscheinlichkeiten als reine Zahl, d.h. nicht in %. Sollen Absorptionslängen und Streulängen unendlich sein, so muß 0 angegeben werden.

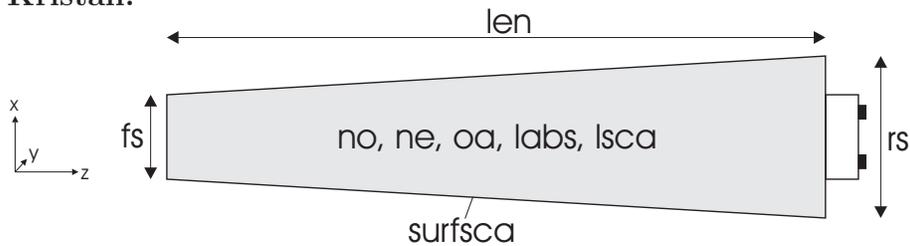
Manche Parameter können wahlweise als Konstante oder als Parameterdatei angegeben werden. Wird beides angegeben, so haben die Werte aus der Datei Vorrang. Die Parameterdatei muß dann eine Textdatei mit zwei Spalten sein. In der ersten steht die Wellenlänge in nm in aufsteigender Reihenfolge, in der zweiten der dazugehörige Parameter.

Die Größe des Detektors und der Kittbedeckung können wahlweise als Längenangabe oder als Bedeckung relativ zur Größe der Rückfläche angegeben werden.

Bei der Reflexionsart bedeutet „0“ metallisch, „1“ diffus.

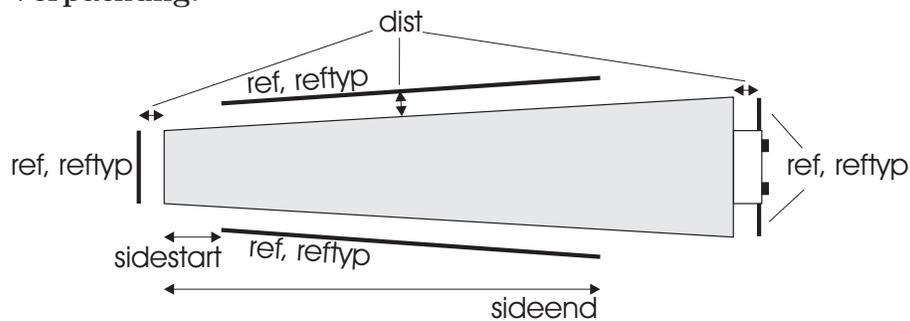
Folgende Schlüsselwörter sind den Parametern zugeordnet:

Kristall:

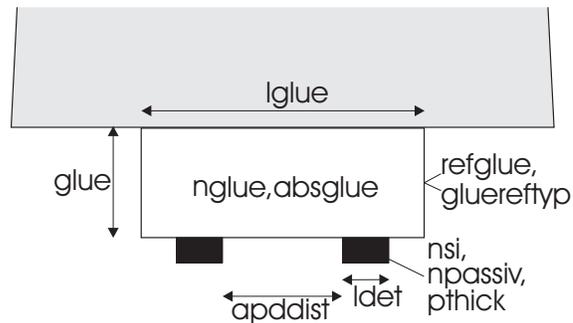


Parameter	Schlüsselwort	Voreinst.
Länge	len	100
Frontseite	fs	10
Rückseite	rs	10
Wellenlänge	lambda / spectrum	400 / -
optische Achse (x y z)	oa	0 0 1
n_O	no / nofile	2.0
n_{AO}	ne / nefile	2.0
Absorptionslänge	labs / labsfile	0 / -
Streulänge	lsca	0
Oberflächenstr.wkeit	surfsca	0

Verpackung:



Parameter	Schlüsselwort	Voreinst.
Beginn der Seitenverp.	sidestart	0
Ende der Seitenverp.	sideend	len
Reflektivität	ref	0.9
Reflexionsart	reftyp	0
Abstand zum Kristall	dist	1

**Kitt:**

Parameter	Schlüsselwort	Voreinst.
Brechungsindex	nglue / ngluefile	1.5
Absorptionslänge	absglue / absgluefile	0 / -
Dicke	glue	1
Hüllenreflektivität	refglue	1
Reflexionsart	gluereftyp	0
Kittbedeckung (Länge)	lg glue	rs
Kittbedeckung (relativ)	gluecov	1

Detektor:

Parameter	Schlüsselwort	Voreinst.
Brechungsindex	nsi	1.5
Brechungsindex der Antireflexschicht	npassiv	nsi
Dicke der Antireflexschicht (nm)	pthick	50
Bedeckung des Detektors (Länge)	ldet	rs
Bedeckung des Detektors (relativ)	cover	1
Anzahl Detektoren (1/2)	apds	1
Abstand der Detektoren	apddist	0

Sonstiges:

Parameter	Schlüsselwort	Voreinst.
Anzahl Photonen · 1000	photons	1000

Eine Beispieldatei könnte so aussehen:

```
C Laenge in mm (LENGth):  
len 200.  
  
C Basislaenge der Frontseite in mm (FrontSide):  
fs 10.  
  
C Basislaenge der Rueckseite mit PM in mm (RearSide):  
rs 20.  
  
C optische Achse (Optical Axis):  
OA 1. 0. 0.  
  
C n ordentlich (N Ordinary):  
no 2.4  
  
C n ausserordentlich (N Extraordinary):  
ne 1.8  
  
C n des optischen Kittes (N GLUE):  
nglue 1.5  
  
C n der SI-Diode (N SI):  
nsi 1.5  
  
C Absorptionslaenge in mm (ABSorptionLength):  
labs 10000.  
  
C Streulaenge in mm (SCAtteringLength):  
lsca 0.  
  
C Oberflaechen-Streuwahrscheinlichkeit (SURfaceSCAttering):  
surfsca 0.0  
  
C Reflektivitaet der Folie (REFlectivity):  
ref 0.  
  
C Dicke des Klebers (GLUE):  
glue 0.1  
  
C Bedeckungsfaktor (COVER):  
cover 1.0  
  
C Anzahl Photonen in tausend (PHOTONS):  
photons 1000  
  
end
```

Als Ergebnis produziert Licobix zwei Dateien: Eine Datei mit der Endung „.dat“ speichert in Textform die Nachweiswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von z in Prozent und als absolute Zahl. Dies geschieht für alle acht Verpackungsvarianten von unverpackt bis zu Front,Seite und Rückseite verpackt. Darunter werden die Parameter, mit denen das Programm gestartet wurde, ausgegeben.

Die zweite Datei mit der Endung „.hsto“ enthält wesentlich mehr Daten in Form von PAW-Histogrammen (sind acht Histogramme angegeben, so bezieht sich das immer auf die acht Verpackungsvarianten):

Histogramm Nr.	Inhalt
1	z -Position der Quelle der emittierten Photonen
2	$\cos(\theta_E)$ der emittierten Photonen
10...17	z -Position der Quelle der detektierten Photonen
20...27	$\cos(\theta_E)$ der detektierten Photonen
30...37	Zurückgelegter Weg der detektierten Photonen
40...47	Zahl der Reflexionen für detektierte Photonen
50...57	Zurückgelegter Weg für emittierte Photonen
60...67	Zahl der Reflexionen für emittierte Photonen
70	Position der Photonen, die auf die Rückseite treffen
71	Position der Photonen, die auf den Detektor treffen
80	$\cos(\theta)/\sin(\varphi)$ der auf die Rückseite treffenden Photonen
81	$\cos(\theta)/\sin(\varphi)$ der durch die Rückseite gehenden Photonen (im Kristall)
82	$\cos(\theta)/\sin(\varphi)$ der Photonen im Kitt
90	Emissionsspektrum (nur falls Parameter „spectrum“ angegeben)
91	Detektionsspektrum (nur falls Parameter „spectrum“ angegeben)

Das Programm wurde mit Fortran 77 unter Verwendung der CERN-Library programmiert und mit den Compilern „Digital Fortran 77“ (unter Digital Unix), „DEC Fortran“ (unter Ultrix) und „GNU F77“ (unter Linux) erfolgreich compiliert und betrieben.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die diese Diplomarbeit ermöglicht und mich bei der Arbeit unterstützt haben. Es war eine spannende Mischung aus klassischer Elektrodynamik, die Ende des vorigen Jahrhunderts ein Forschungsschwerpunkt war und aktueller Hochenergiephysik, mit Einblicken in die Forschungseinrichtungen des CERN und des Paul-Scherer-Instituts.

Prof. Dr. D. Schmitz danke ich dafür, daß er die Arbeit ermöglichte und mit Diskussionen und kritischen Nachfragen interessiert begleitete.

Für seine gut dosierte Betreuung, die Einführung in die Physik der Lichtsammlung und die Feinheiten der Unixwelt danke ich besonders Dr. Johannes Schwenke, der leider nicht bis zum Ende der Arbeit am Institut bleiben konnte.

Ein Dank geht auch an PD. Dr. W. Krenz, der die Betreuung in der Endphase übernahm und sich auch als Zweitgutachter zur Verfügung stellte.

Thomas Kirn und Thorsten Siedenburg gaben mir mit ihren kritischen Bemerkungen in Probevorträgen und bei der Durchsicht dieser Arbeit viele Anregungen für Verbesserungen. Dafür und für die zahlreichen Tips rund um „PAW“ und \LaTeX möchte ich mich herzlich bedanken.

Für die moralische und finanzielle Unterstützung meines Physikstudiums möchte ich mich besonders bei meinen Eltern bedanken.

Stefan Geller danke ich für die Geduld mit mir und seine Anteilnahme an der Arbeit.